

光学設計ノート 27 (ver.1.0)

フレネル回折とフラウンホーファー回折

株式会社タイコ 牛山善太

今回は、回折現象を解析的に取り扱う上で基本となるフレネル回折とフラウンホーファー回折を取り上げさせていただく。レンズ等による結像を考える際にも重要である。

1. フレネル回折式とフラウンホーファー回折式の導出

ここでフレネル-キルヒホッフの回折積分式を用いてこれらの回折強度パターンについて検討してみよう。

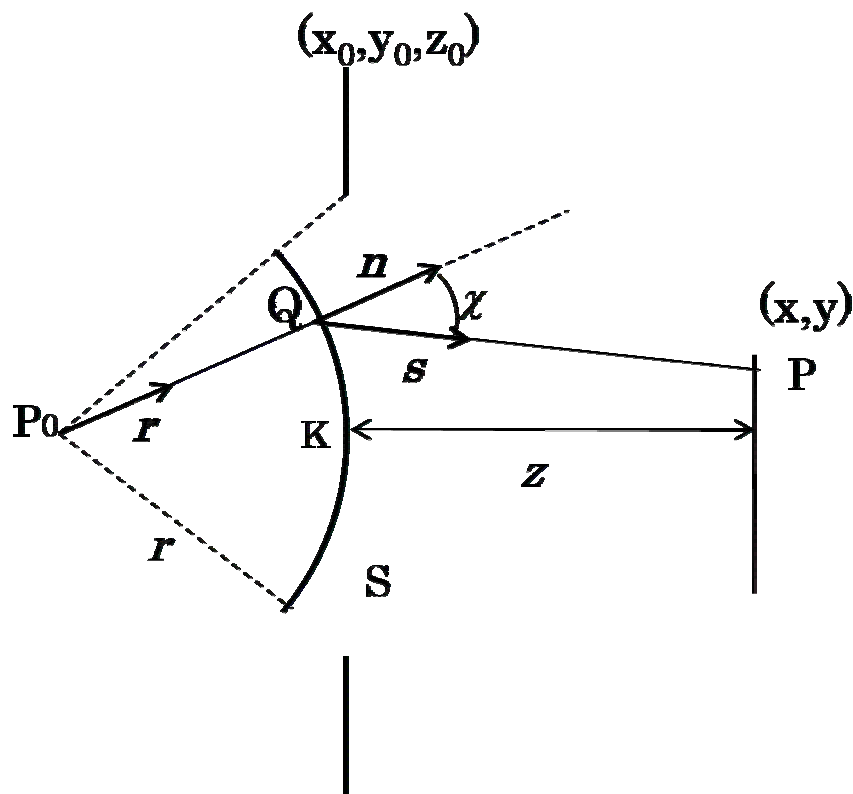


図1 キルヒホッフ回折積分式の開口部の考え方

図 1 に有る様に、光源 P_0 から発生する球面波の表面を K とし、波面に達する光線方向を表す単位ベクトルを r 、この光線が波面に達する点 Q における波面法線単位ベクトルを n 、この点 Q から振幅を計算したい点 P に向かう方向を表す単位ベクトルを s とする。当然、 P_0 は波面の中心であるから n と r は一致する。また P_0 から Q までの距離を r 、 Q から P までの距離を s とする。さらに、図の様に n と s の為す角度の差として χ なる量を導入すればフレネル-キルヒホッフの回折積分式は波面表面 K 上の積分として以下のように表わされる。 A は波面上の最大振幅を表す係数、 $d\sigma$ は波面上の微小面積である。 P_0 から Q まで、 Q から P までの距離をそれぞれ r, s とする

$$U(P) = \frac{-iA \exp(ikr)}{2\lambda r} \iint_{\sigma} \left\{ \frac{\exp(iks)}{s} (1 + \cos \chi) \right\} d\sigma \quad (0)$$

さて、ここで χ について考えると、この値は点 Q において波面に直交する光線と、 Q から発生する 2 次波面の影響、つまりは回折の影響を調べる方向の為す角度を示している。ここでの絞り上にはレンズも何も存在しないので明らかに点 Q を通過する光線方向に大方のエネルギーは集中し、 χ が大きな、光線から大きく逸れた方向への影響は少ないと考えることも出来る。従って χ は十分小さな値の範囲で積分への寄与は有効であると考えられ、また開口の大きさ D が、つまり x_0, y_0 の最大値が、 r_0, s に比べ十分に小さいとすれば、さらに χ は \exp 内に含まれないので、 $\cos \chi \approx 1$ と出来て(0)式は、

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\sigma} g(x_0, y_0) \frac{\exp\{iks\}}{s} d\sigma \quad (1)$$

ただし、ここで、この場合に g は、(0)式より

$$g(x_0, y_0) = A \frac{\exp(ikr)}{r} \quad (2)$$

であり、スリット上の位相も含めた複素振幅分布を表わす。一般的には光学系透過の際に被る振幅、位相変化等を織り込んだ任意の分布を想定することが可能である。

(1)式はフレネル-キルヒホッフの回折積分式をシンプルに表現し、実用的にした有益なものであり、コンピュータを用いた数値解析においてはそのままの形式でも十分利用可能であるが、より物理的な洞察に有利な、見通しの良い形にするためにさらなる適切な近似が行われる。

(1)式をスリット面上 (x_0 - y_0 系)、スクリーン上 (x - y 系) の z 軸を共通とする二つの直交座標系上に書き換えると、

$$U(x, y) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \frac{\exp\{iks\}}{s} dx_0 dy_0 \quad -(3)$$

ここで明らかに、

$$s = \sqrt{(z - z_0)^2 + (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \quad -(4)$$

ところが、

$$s = (z - z_0) \left\{ 1 + \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{(z - z_0)^2} \right\}^{1/2} \quad -(5)$$

となるので、Taylor 展開の 2 次の項をとって近似すると、

$$(1 \pm \alpha)^m = 1 \pm m\alpha + \frac{m(m-1)}{2} \alpha^2 \dots \quad -(6)$$

の関係が成り立つので (5) 式は、

$$s = z - z_0 + \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{2(z - z_0)} - \frac{\{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2\}^2}{8(z - z_0)^3} \dots$$

ここで、

$$z_0 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{2r} - \frac{(x_0^2 + y_0^2)^2}{8r^3} \dots$$

であって、この式において既述の様に開口の大きさに関する x_0, y_0 が r, s に比べ十分に小さいのであり、さらに、 $\cos \theta \approx 1$ と出来るほどに P に影響を及ぼす波面上の領域が限られたものであるとすれば積分中、exp 項内での z_0 の値はそう変化しないことになる。また下記で扱う回折近似領域では特に $z_0 \ll z$ であって、以降 z_0 の値を無視することとする。

すると

$$s = z + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z} - \frac{\{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2\}^2}{8z^3} \dots \quad (7)$$

 フラウンホーファー近似

 フレネル近似

と表現できる。(7)式における近似をどの項まで用いるべきかはスリット-スクリーン間の距離 z に依存し、第3項まで採用し、その後の項を打ち切れる領域を遠方領域、或はフラウンホーファー領域、第4項までを採用し、その後の項を打ち切る領域を近方領域、或はフレネル領域と呼ぶ。

(7)式の第3項までを T_3 、第4項を T_4 、第5項を T_5 と表し、 s が x, y, x_0, y_0, z_0 と比べて十分に大きければ(3)式の \exp 項の分母の s を定数 z と近似して積分外に出し、

$$U(x, y) \approx -\frac{i}{z\lambda} \int \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \exp(ikT_3) \exp(ikT_4) \exp(ikT_5) dx_0 dy_0$$

と置く。或いは x, y に s 、 D に比べて十分に大きな値を想定すれば、線分 QP が光軸となす代表的な角度を δ とし、少なくとも $s = z/\cos \delta$ とすべきであるから

$$U(x, y) \approx -\frac{i \cos \delta}{z\lambda} \int \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \exp(ikT_3) \exp(ikT_4) \exp(ikT_5) dx_0 dy_0 \quad (8)$$

と出来、以降こちらの式を採用することにする。

するとこの時もし、少なくとも $kT_5 \ll \pi/2$ であれば、この項による位相変化分は $\pi/4$ 以下であり、これを最大値として瞳上座標の変化に伴いこの項による位相変化分は連続的に減少する。従って $\pi/2$ を区切りと取りあえず考え、この値よりも遙かに小さな値を kT_5 項に求めれば全体の積分に対する大きな影響は持たなくなると考えることも出来よう。すると、以下の様に(7)式からフル近似の条件として、

$$z^3 \gg \frac{\{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2\}_{\max}^2}{2\lambda} \quad (9)$$

との目安を得る事ができる。

フレネル回折近似式は、

$$U(x, y) = -\frac{i \cos \delta}{z\lambda} \exp(ikz) \int \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \exp\left[\frac{ik}{2z} \{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2\}\right] dx_0 dy_0 \quad (10)$$

さらに整理して、

$$= -\frac{i \cos \delta}{z \lambda} \exp(ikz) \exp\left\{ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z}\right)\right\} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \cdot \exp\left\{ik\left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{2z}\right)\right\} \exp\left\{-ik\left(\frac{x_0 x + y_0 y}{z}\right)\right\} dx_0 dy_0 \quad -(11)$$

となる。

さらに、 T_4 の項について考えると、この項には像面座標が含まれていないので z であれば（既述の条件から光源位置も無限遠となる。）この項を（11）式から消去して考えることが可能であるが、有限な z の値に対しても T_5 と同様に $kT_4 \ll 1/2$ なる条件を考えると、

$$z \gg \frac{2(x_0^2 + y_0^2)_{\max}}{\lambda} \quad -(12)$$

が T_4 項の省略のための条件の目安となる。ここで、スリットを長さ D の正方形とすれば(12)式より、

$$z \gg \frac{D^2}{\lambda} \quad -(13)$$

なる条件が得られる（レイリーの距離）。ここで定められる領域をフラウンホーファー領域と呼ぶ。これらの条件下におけるフラウンホーファー回折近似式は

$$U(x, y) = \frac{-i \cos \delta}{z \lambda} \exp\left\{ik\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)\right\} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \exp\left\{\frac{-ik}{z}(x_0 x + y_0 y)\right\} dx_0 dy_0 \quad -(14)$$

となる。

ここで、波数 $k = 2\pi/\lambda$ であるので、（14）式において、

$$v_x = \frac{x}{z \lambda} \quad , \quad v_y = \frac{y}{z \lambda} \quad -(15)$$

スクリーン上の観測点座標をスリットと観測面の距離で正規化し、波長で割り、空間周波数を設定すれば（14）式は、

$$U(x(v_x), y(v_y)) = U(v_x, v_y) = A' \iint_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \exp\{-i2\pi(x_0 v_x + y_0 v_y)\} dx_0 dy_0 \quad -(16)$$

ただし、

$$A' = \frac{-i \cos \delta}{z\lambda} \exp \left\{ ik \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \right) \right\} \quad -(17)$$

である。(16)式は明らかに2次元のフーリエ変換の形であり、フラウンホーファー回折像複素振幅分布はスリット(射出瞳)の振幅分布 $g()$ のフーリエ変換で得られることが理解できる。射出瞳中心から P までの線分の光軸となす角度の x 、 y 成分をそれぞれ v_x 、 v_y とすれば(15)式は

$$v_x = \frac{\tan \theta_x}{\lambda} \quad , \quad v_y = \frac{\tan \theta_y}{\lambda} \quad -(18)$$

と出来る。フラウンホーファー回折像振幅分布計算においては瞳から測定点への方向が定まると、(16)式のフーリエ変換の結果は決まってしまうことが分かる。因みに(18)式から(17)式は以下の様にも表現できる。

$$A' = \frac{-i}{z\lambda} \left(1 + \tan^2 \theta_x + \tan^2 \theta_y \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ ikz \left(1 + \frac{\tan^2 \theta_x}{2} + \frac{\tan^2 \theta_y}{2} \right) \right\} \quad -(19)$$

2. 参考文献

- 1) M.Born & E.Wolf: 光学の原理、第7版 / 草川徹訳(東海大学出版会,2005)
- 2) 辻内順平: 光学概論 (朝倉書店、東京、1979)
- 3) 鶴田匡夫: 応用光学 (培風館、東京、1990)
- 4) 宮本健郎: 光学入門 (岩波書店、東京、1995)
- 5) 牛山善太: 波動光学エンジニアリングの基礎(オプトロニクス社、東京、2005)