光学設計ノーツ 70 （ver. 1. 0）

体積ホログラムの回折効率を考える　7

今回も引き続いて厚さのある体積ホログラム(thick hologram)の回折効率(diffraction efficiency)について、H.Kogelnik、参考文献[1]の結合モード理論（coupled- mode theory）（或いは結合波理論(coupled-wave theory)を参照して解説させていただきたい。今回も前回に続き coupled-wave 方程式を解いて行く。また、ホログラムの回折効率の定義についても触れさせて戴く。

なお、前回同様、参考文献[1]とともに、その解説が丁寧に記されている貴重な邦文である参考文献[4]を参照させて戴いている。

1.　透過型ホログラムの再生光の複素振幅

$z=0$ でホログラムに入射した光 R は、体積媒質内の干渉縞が z 軸方向に進行しホログラムを通過し再生光Sとして移行し、透過型ホログラムの場合には $z=t$ の面から射出する。従って、θ は小さい角度で有り、干渉縞の法線方向を表す ϕ は $\pi/2$ が近い値であれば(図 1)本連載 68 回より、

$$c_R = \frac{\rho_z}{B} = \cos\theta \qquad (68\text{-}9.1)$$

$$c_S = \frac{\sigma_z}{B} = \cos\theta - \frac{K}{B}\cos\phi \qquad (68\text{-}9.2)$$

なので、光波は右側に進行し、Cs > 0 であって、

$$R(0) = 1 \text{、} S(0) = 0 \qquad (1)$$

従って前回(1)(2)式、

$$R(z) = r_1 \exp(\gamma_1 z) + r_2 \exp(\gamma_2 z) \qquad (69\text{-}1)$$

$$S(z) = s_1 \exp(\gamma_1 z) + s_2 \exp(\gamma_2 z) \qquad (69\text{-}2)$$

より、

$$r_1 + r_2 = 1 \qquad (2A)$$

$$s_1 + s_2 = 0 \qquad (2B)$$

となる。

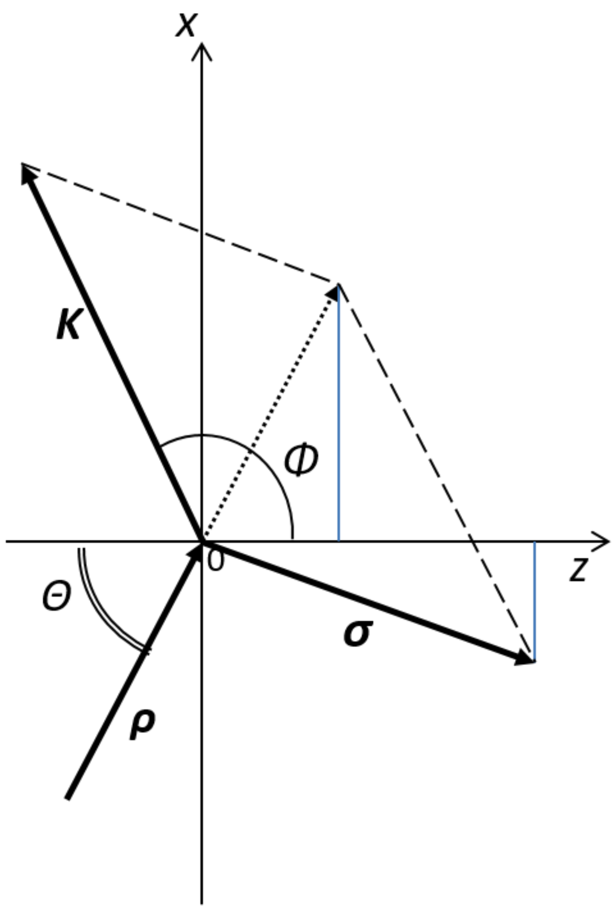

図1　格子ベクトルと参照光、再現光ベクトル

ところで、前回(4)式は、

$$(c_S\gamma_1+\alpha+i\vartheta)s_1=-i\kappa r_1$$

$$(c_S\gamma_2+\alpha+i\vartheta)s_2=-i\kappa r_2$$

と書けるので、これら 2 式の辺々を加えて

$$c_S(\gamma_1 s_1+\gamma_2 s_2)+(\alpha+i\vartheta)(s_1+s_2)=-i\kappa(r_1+r_2)$$

従って(2A)(2B)式より、

$$c_S(\gamma_1 s_1+\gamma_2 s_2)=-i\kappa \qquad (3)$$

となる。
ここで、

$$\gamma_m=-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{c_S}+\frac{\alpha}{c_R}+\frac{i\vartheta}{c_S}\right)\pm\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\alpha}{c_R}-\frac{\alpha}{c_S}-\frac{i\vartheta}{c_S}\right)^2-\frac{4\kappa^2}{c_R c_S}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (69\text{-}8)$$

であって、m=1 は 2 重根号の正、m=2 は負の場合を表しているので

$$\gamma_1=G+H$$

$$\gamma_2=G-H$$

と置いて、(3)式に代入すれば

$$c_S(Gs_1+Hs_1+Gs_2-Hs_2)=-i\kappa \qquad (3)$$

(2B)式より、

$$c_S(s_1 - s_2)H = -i\kappa \qquad (3)$$

$$s_1 + s_1 = \frac{-i\kappa}{c_S H}$$

$$s_1 = \frac{-i\kappa}{c_S(\gamma_1 - \gamma_2)} \qquad (4)$$

が得られる。ここでの $s_{1,2}$ の値を(69-2)式に代入すると、

$$S(t) = \frac{i\kappa}{c_S(\gamma_1 - \gamma_2)}\{\exp(\gamma_2 t) - \exp(\gamma_1 t)\} \qquad (5)$$

と言う、ホログラム透過後の光波の複素振幅を表す式が得られる。

2. ホログラムの回折効率

ホログラムの回折効率 η は参照光の強度を I_0、再現光の強度を I_1 とした時、

$$\eta = \frac{I_1}{I_0} \qquad (6)$$

で定義される。よって、z 軸方向への効率としては再現光と参照光のベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{\rho}$ の方向余弦はそれぞれ、

$$\sigma_z : B\cos\theta - K\cos\phi$$
$$\rho_z : B\cos\theta$$

と表わされるので(図-1)、従って再現光の複素振幅を S として（変数右肩の＊は複素共役を表す。)、

$$\eta = \frac{B\cos\theta - K\cos\phi}{B\cos\theta} SS^*$$

上式右辺分子が負になる場合も想定して

$$\eta = \frac{\left|\cos\theta - \frac{K}{B}\cos\phi\right|}{\cos\theta} SS^* \qquad (7)$$

と出来る。ここで、上記の(68-9.1)(68-9.2)式の関係から,

$$\eta = \frac{|c_S|}{c_R} SS^* \qquad (8)$$

となる。

次回以降では上記(69–8)式を(5)式に代入して再生信号光の透過後の複素振幅を得た後、回折効率を表す(8)式を利用して、透過型ホログラムの回折効率を求めて行くこととする。

３.　参考文献

[1] Kogelnik, *Bell Sys.Tech. J.*, **48**, 2909 (1969).

[2] M.Born & E.Wolf :Principles of Optics,6th edition(Pergamon Press, Oxford,1993)／草川徹、横田英嗣訳：光学の原理（東海大学出版会,1977).

[3] J.W.Goodman：フーリエ光学 / 尾崎義治、朝倉利光 訳（森北出版、東京、2012）

[4] 辻内順平：ホログラフィー（裳華房、東京、1997）

[5] P.Hariharan:Optical Holography Principles,techniques and applications,2nd.edi. (Cambridge University Press,Cambridge,1996)

[6] 辻内順平：光学概論Ｉ（朝倉書店、東京、1979）

[7] 三好旦六：光・電磁波論（培風館、東京、1995）

執筆者：牛山 善太

博士（工学）

元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師

(株)タイコ 代表取締役

(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供：

株式会社オプティカルソリューションズ

TEL: **03-5833-1332**

Mail: info@osc-japan.com

Web: http://www.osc-japan.com

〒101-0032

東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階