光学設計ノーツ 71　(ver. 1.0)

体積ホログラムの回折効率を考える　8

今回も引き続いて厚さのある体積ホログラム(thick hologram)の回折効率(diffraction efficiency)について、H.Kogelnik、参考文献[1]の結合モード理論（coupled- mode theory）（或いは結合波理論(coupled-wave theory)を参照して解説させていただきたい。前回に続き coupled-wave 方程式を解いて行き、今回は透過型ホログラムの回折後の複素振幅を導出する。

なお、前回同様、参考文献[1]とともに、その解説が丁寧に記されている貴重な邦文である参考文献[4]を参照させて戴いている。

1.　ホログラム透過後の複素振幅

ホログラムの回折効率は前回(8)式、

$$\eta = \frac{|c_S|}{c_R} SS^* \qquad (70\text{-}8)$$

で表わされた。透過型ホログラムでは再現光の複素振幅は S(t)として表されてので、上式の S にはこれまで、考えて来た S(t)を用いる。

さて、本連載 69 回の(8)式、

$$\gamma_m = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{c_S} + \frac{\alpha}{c_R} + \frac{i\vartheta}{c_S}\right) \pm \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\alpha}{c_R} - \frac{\alpha}{c_S} - \frac{i\vartheta}{c_S}\right)^2 - \frac{4\kappa^2}{c_R c_S}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (69\text{-}8)$$

（m=1 は 2 重根号の正、m=2 は負の場合を表す。）

それから、前回(5)式より、

$$S = \frac{i\kappa}{c_S(\gamma_1 - \gamma_2)}\{\exp(\gamma_2 t) - \exp(\gamma_1 t)\} \tag{1}$$

から、(70-8)式の回折効率を求めよう。

ここで、(1)式に(69-8)式を代入する際に

$$S = G \times H \tag{2}$$

と置いて考える。

$$G = \frac{i\kappa}{c_S(\gamma_1 - \gamma_2)}$$

$$= \frac{i\kappa}{c_S\left[\left(\frac{\alpha}{c_R} - \frac{\alpha}{c_S} - \frac{i\vartheta}{c_S}\right)^2 - \frac{4\kappa^2}{c_R c_S}\right]^{1/2}} \tag{3}$$

さらにここで、

$$\nu = \frac{\kappa t}{\sqrt{c_R c_S}} \tag{4}$$

$$\xi = \frac{t}{2}\left(\frac{\alpha}{c_R} - \frac{\alpha}{c_S} - \frac{i\vartheta}{c_S}\right) \tag{5}$$

と置けば(3)式は、

$$G=\frac{i\kappa}{c_S\left[\left(\xi\frac{2}{t}\right)^2-4\left(\frac{\nu}{t}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$=\frac{it\kappa}{2c_S\sqrt{\xi^2-\nu^2}}$$

$$=\frac{t\kappa}{2c_S\nu\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\nu^2}}}$$

$$=\frac{t\kappa}{2c_S\frac{\kappa t}{\sqrt{c_Rc_S}}\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\nu^2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{c_R}}{2\sqrt{c_S}\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\nu^2}}} \qquad (6)$$

また、

$$H=\exp\left[\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{c_R}+\frac{\alpha}{c_S}+\frac{i\vartheta}{c_S}\right)-\frac{1}{2}\left(\left[\frac{\alpha}{c_R}-\frac{\alpha}{c_S}-\frac{i\vartheta}{c_S}\right]^2-\frac{4\kappa^2}{c_Rc_S}\right)^{1/2}\right\}t\right]$$
$$-\exp\left[\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{c_R}+\frac{\alpha}{c_S}+\frac{i\vartheta}{c_S}\right)+\frac{1}{2}\left(\left[\frac{\alpha}{c_R}-\frac{\alpha}{c_S}-\frac{i\vartheta}{c_S}\right]^2-\frac{4\kappa^2}{c_Rc_S}\right)^{1/2}\right\}t\right]$$

(4)(5)式より、

$$H=\exp\left[\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{c_R}-\frac{2\xi}{t}\right)-\frac{1}{2}\left(\left[\frac{2\xi}{t}\right]^2-\frac{4\nu^2}{t^2}\right)^{1/2}\right\}t\right]$$

$$-\exp\left[\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{c_R}-\frac{2\xi}{t}\right)+\frac{1}{2}\left(\left[\frac{2\xi}{t}\right]^2-\frac{4\nu^2}{t^2}\right)^{1/2}\right\}t\right]$$

$$=\exp\left[\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{c_R}-\frac{2\xi}{t}\right)\right\}t\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2\xi}{t}\right)^2-\frac{4\nu^2}{t^2}\right\}^{1/2}t\right]$$

$$-\exp\left[\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{c_R}-\frac{2\xi}{t}\right)\right\}t\right]\exp\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2\xi}{t}\right)^2-\frac{4\nu^2}{t^2}\right\}^{1/2}t\right]$$

$$=\exp\left[\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{c_R}-\frac{2\xi}{t}\right)\right\}t\right]\left\{\exp\left(-\sqrt{\xi^2-\nu^2}\right)-\exp\left(\sqrt{\xi^2-\nu^2}\right)\right\}$$

$$=\exp\left(-\frac{\alpha}{c_R}t\right)\exp(\xi)\left\{\exp\left(-i\sqrt{\nu^2-\xi^2}\right)-\exp\left(i\sqrt{\nu^2-\xi^2}\right)\right\}$$

従って

$$H=\exp\left(-\frac{\alpha}{c_R}t\right)\exp(\xi)\times i\left\{-2\sin\left(\sqrt{\nu^2-\xi^2}\right)\right\} \tag{7}$$

よって、(6)式と(7)式を掛けて、

$$S = G \times H$$

$$= \frac{\sqrt{c_R}}{2\sqrt{c_S}\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\nu^2}}} \times \exp\left(-\frac{\alpha}{c_R}t\right)\exp(\xi) \times i\left\{-2\sin\left(\sqrt{\nu^2-\xi^2}\right)\right\}$$

よって、

$$S = \frac{-i\sqrt{\frac{c_R}{c_S}}\exp\left(-\frac{\alpha}{c_R}t\right)\exp(\xi)\sin\left(\sqrt{\nu^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\nu^2}}} \qquad (8)$$

と透過型ホログラムの回折効率を考える上で、重要な式が得られる。

２． 参考文献

[1] Kogelnik, *Bell Sys.Tech. J.*, **48**, 2909 (1969).

[2] M.Born & E.Wolf :Principles of Optics,6th edition(Pergamon Press, Oxford,1993)／草川徹、横田英嗣訳：光学の原理（東海大学出版会,1977).

[3] J.W.Goodman：フーリエ光学 / 尾崎義治、朝倉利光 訳（森北出版、東京、2012）

[4] 辻内順平：ホログラフィー（裳華房、東京、1997）

[5] P.Hariharan:Optical Holography Principles,techniques and applications,2nd.edi. (Cambridge University Press,Cambridge,1996)

[6] 辻内順平：光学概論Ｉ（朝倉書店、東京、1979）

[7] 三好旦六：光・電磁波論（培風館、東京、1995）

執筆者：牛山 善太

博士（工学）

元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師

(株)タイコ 代表取締役

(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供：

株式会社オプティカルソリューションズ

TEL: **03-5833-1332**

Mail: info@osc-japan.com

Web: http://www.osc-japan.com

〒101-0032

東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階