〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8（MAS 三田ビル 3 階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/

光学設計ノーツ　４５（aver.1.0）

波面収差の展開式

株式会社タイコ
牛山善太

今回は、光学系の結像特性を考えるにあたり、測定値、或いは光線追跡の結果、計算値として得られる波面収差が、どのような収差的要素から構成されているかを解説させていただきたい。混沌とした収差と言うものを、整理・分類して理解する、そして除去するためにも重要な光学設計理論の部分である。内容としては本連載 15 回 ”波面収差と光線収差 ”に直ちに続くものであり、ご参照願いたい。

１．　回転対称な光学系における波面収差の展開式

本連載 15 回においては、波面収差 W は実際には、物体面上の x, y 座標、射出瞳面上の u', υ' 座標の4つの変数により定まると考えて来た。さて、ここで、図 1 にある様に上記平面に極座標系を導入して

$$x = r_0 \cos\theta_0 \quad 、\quad u' = r\cos\theta$$

$$y = r_0 \sin\theta_0 \quad 、\quad \upsilon' = r\sin\theta$$

と各変数を置く。

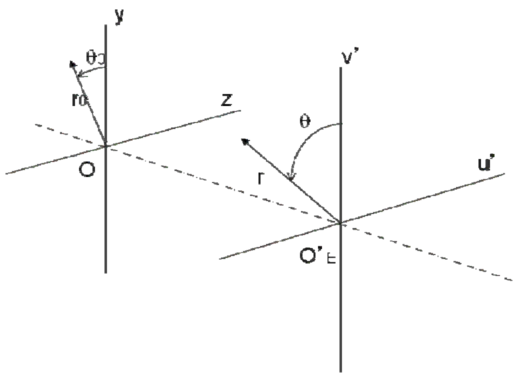

図1　光線通過点の極座標表示

すると、光学系に、光軸についての回転対称性が存在すると考えれば、波面収差 W は実は $\vec{r}_0, \vec{r}$ そして、これら二つの動径の為す角度、$\theta - \theta_0$ のみにより決まってしまうことが理解できる。よって、以下のベクトル

$$\vec{r}_0(x,y) \quad 、\quad \vec{r}(u',\upsilon')$$

を考えれば

$$\vec{r}_0\cdot\vec{r}_0 = x^2 + y^2 \tag{1}$$

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = u'^2 + \upsilon'^2 \tag{2}$$

$$\vec{r}_0\cdot\vec{r} = r_0 r\cos(\theta-\theta_0) = xu' + y\upsilon' \tag{3}$$

の3種類の変数のみを持つ関数により波面収差を表現することが可能である。これら3変数のみで2ベクトルの絶対値、為す角度が厳密に求まり、それらの必要最低限の変数で表現できる関数は必ず(1)-(3)式の3変数で表現できるからである。(1)(2)(3)式における量は、以下に示す、光軸を中心とした角度αの座標系回転後においても変化しない。

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \quad 、\quad y = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha$$

$$u' = u''\cos\alpha - \upsilon''\sin\alpha \quad 、\quad \upsilon' = \upsilon''\cos\alpha + u''\sin\alpha$$

また、さらに回転対称性を考慮すれば、物体面上、物点が$z=0$として x 軸上に必ず存在すると考えても、波面収差を考える場合に一般性を失わない。その場合、(1)(2)式は

$$\vec{r}_0\cdot\vec{r}_0 = y^2 \tag{4}$$

$$\vec{r}_0\cdot\vec{r} = r_0 r\cos(\theta) = y\upsilon' \tag{5}$$

よって、共軸光学系における波面収差を冪級数展開することを考えると、その一般形式は、光学系の構成、物点位置により決められる係数 $a_0, b_0, b_1, \cdots$をもちいて

$$\begin{aligned}
W(0,y;u',\upsilon') &\equiv W\left(u'^2+\upsilon'^2, y\upsilon', y^2\right)\\
&= a_0 + b_0 y^2 + b_1\left(u'^2+\upsilon'^2\right) + b_2 y\upsilon' + c_0 y^4 + c_1\left(u'^2+\upsilon'^2\right)^2\\
&\quad + c_2 y^2\upsilon'^2 + c_3 y^2\left(u'^2+\upsilon'^2\right) + c_4 y^3\upsilon' + c_5 y\upsilon'\left(u'^2+\upsilon'^2\right)\\
&\quad + d_0 y^6 + d_1\left(u'^2+\upsilon'^2\right)^3 + d_2 y^3\upsilon'^3 + d_3\left(u'^2+\upsilon'^2\right)^2 y\upsilon' + d_4 y^2\left(u'^2+\upsilon'^2\right)^2\\
&\quad + d_5 y^4\upsilon'^2 + d_6\left(u'^2+\upsilon'^2\right)y^4 + d_7\left(u'^2+\upsilon'^2\right)y^2\upsilon'^2 + d_8\left(u'^2+\upsilon'^2\right)y^3\upsilon'\\
&\quad + d_9 y^5\upsilon' + \cdots
\end{aligned} \tag{6}$$

と表現することができる。ここでの係数 $a_0, b_0, b_1, \cdots$ は収差係数と呼ばれ、光学系の構成、物点位置により決められる。物点が移動した場合、当然、上記W()の3変数が同じ場合でも、収差は変化するわけであるから、収差係数は変化する。

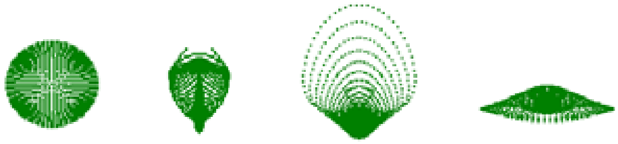

図2　様々な収差図形

複雑な幾何光学的な収差(図2)も(6)式のように収差項を無限に加え合わせていくことで完全に表現できるはずである。別の考え方をすれば(6)式を基にして、共軸光学系における様々なタイプの収差の分類が可能となる。収差を体系的に扱う、収差論の基礎となる考え方である。

(6)式は物体位置が決まったときに、その共役像面を中心として全ての収差を記述している。物体位置、光学系の構成が不変であれば、収差係数も変わらない。また、(6)式は(2)(4)(5)式にある通り、物体高、或いは像高と、極座標表示された、射出瞳面座標の光線通過位置を示す動径とその角度θによって表現することもできる。

２．　収差項の検討

２．１参照球面半径のとり方に依存する波面収差項

ここで、(6)式における、変数のタイプのちがいにより分類される各項の内容について検討してみよう。まず

$$W_0 = a_0 + b_0 y^2 + c_0 y^4 + d_0 y^6 + \cdots \qquad (7)$$

$$W_2 = b_1 \left(u'^2 + \upsilon'^2 \right) + b_2 y \upsilon' \qquad (8)$$

の2つの項について考える。

(7)式における項により表わされる収差は、y座標、つまり物点の位置のみにより決まる。光線が光学系を通過する際の瞳座標に依存しない。このことは、瞳のどの位置を通った光線(つまり一つの点光源から射出した全ての光線)も同じ波面収差を持つことを意味する。よって、これら光線の形成する波面は球状であり、全ての光線はその中心に向かう。そしてその中心とは理想像点であるはずである。つまり参照球面と実際の波面は同心球面と成っている。この場合は、<u>参照球面半径の取り方により波面収差は消える</u>。参照球面半径のとり方は一般的には任意であり通常、(7)式で表わされる量は収差とは呼ばれない。

２．２　　焦点ずれの収差項

(8)式における項は(6)式の W_0における項以外の2次の項である。ここで本連載 15回(16),(17)式の波面収差と光線収差の関係から

$$\Delta x = R\frac{\partial W_2}{\partial u'} = 2Rb_1u'$$

$$\Delta y = R\frac{\partial W_2}{\partial \upsilon'} = 2Rb_1\upsilon' + b_2yR \qquad (9)$$

よって、(2)式から、瞳上の動径 rを用いて

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y - b_2yR)^2 = (2Rb_1r)^2 \qquad (10)$$

(10)式より、瞳上に半径 rの円の軌跡を描く光線群は、像面上で rに比例する半径の円を描くことが理解できる(図3)。

従って像面位置を適当に移動させることにより、収差円の半径を0にし、収差を消すことが出来る。(瞳上の光線通過位置の軌跡と、像面上の収差図形のそれぞれの半径が正比例しているところが重要である。扇の要のような一点収束する点が存在するのでこの様な現象が起きる。(図4))

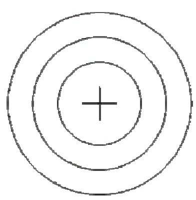

図3 同心円的な収差図形

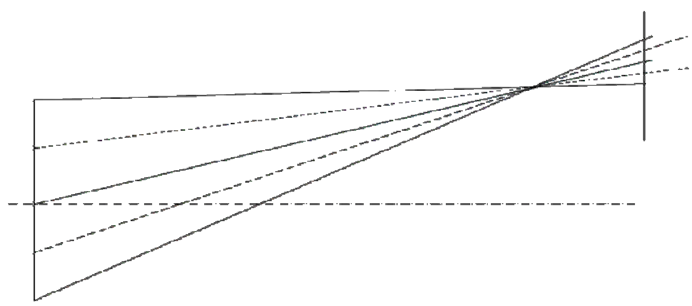

図4　焦点ずれ

これは焦点ずれの収差と呼ばれ一般的な収差とは異なるものである。ピントずれの様なアウトフォーカス位置におけるボケを現す項である。収差では無いが、場合によっては像面上では収差と同じような悪影響を生む。またおのずとピントの合う範囲、深度と関わってくる。この項を観察する限り、ピンボケ収差そのものは像面上で円形にボケていく事が分かる。ただし、その場合、ボケ中心の位置は(10)式から理解できるように、ずれていく。像面位置がずれると考えれば、そこでの像の高さも変化するので、当然のことである。

また、以降の実際の収差項には(光学系の本質的な結像特性を表すものである故)、アウトフォーカス量は、像高以外には関係してこないので、ピントずれ量が、実収差に比し大きくなれば上記の項が収差図形においては支配的となる。

２．３　　実際の収差を現す３次収差項

さて、(6)式から、(7),(8)式に次ぐ低次の項、4次の項を総て書き出せば

$$W_4 = c_1\left(u'^2 + \upsilon'^2\right)^2 + c_2 y^2 \upsilon'^2 + c_3 y^2\left(u'^2 + \upsilon'^2\right) + c_4 y^3 \upsilon' + c_5 y\upsilon'\left(u'^2 + \upsilon'^2\right) \tag{11}$$

(11)式が、実際の収差を表わす、最低次の項よりなる式である。収差は、4次の項、5種類の係数を持つ項より成り立っていて、4次の波面収差と呼ばれ、波面収差を瞳座標により偏微分することにより、光線収差を導けば

$$\Delta x = R\frac{\partial W_4}{\partial u'} = 4c_1 R\left(u'^2 + \upsilon'^2\right)u' + 2c_3 R y^2 u' + 2c_5 R y u'\upsilon' \tag{12}$$

$$\Delta y = R\frac{\partial W_4}{\partial \upsilon'} = 4c_1 R\left(u'^2 + \upsilon'^2\right)\upsilon' + 2c_2 R y^2 \upsilon' + 2c_3 R y^2 \upsilon'$$

$$+ c_4 R y^3 + c_5 R y\left(u'^2 + \upsilon'^2\right) + 2c_5 R y \upsilon'^2 \tag{13}$$

光線収差は物体位置、瞳座標の3次の項により表わされ、3次収差と呼ばれる。また、c_1からc_5までの5つの係数に付随して収差が分類される。これらを、ザイデル(Seidel)の5収差と呼ぶ。ここでは詳しく触れないが、光学系による結像現象に伴う収差は、多くの場合、このザイデルの5収差（球面収差・コマ収差・非点収差・像面湾曲収差・歪曲収差）に基づいて分類される。本来は、様々な形で複合して、実際の結像に現われる収差を個別に検討することができる。

(6)式においては、さらに高次の項が連続し存在していて、上記3次収差の場合と同様に、光線収差として5次の収差、7次の収差を考えることができる。光学系の開口、画角が大きくなれば、それらの影響も顕著になるが、高次収差を扱うのに従い、項の数、収差の種類も非常に多くなって見通しも悪くなり、また、係数の計算も複雑になるので、実際には5次収差までが、Schwarzschild の9収差として検討されている。

参考文献

1)　草川　徹：レンズ光学 (東海大学出版会、東京、1988)
2)　草川　徹：レンズ設計者のための波面光学 (東海大学出版、東京、1976)
3)　辻内順平：光学概論 I (朝倉書店、東京、1979)
4)　松居吉哉：レンズ設計法 (共立出版、東京、1972)
5)　村田和美：光学 (サイエンス社、東京、1979)
6)　牛山善太、草川　徹：シミュレーション光学 (東海大学出版会、東京、2003)