レンズを使う　2　＜sinθの近似精度＞

株式会社タイコ
牛山善太

前回から、照明系を形成するときに光学的には最も重要な要素と成るレンズ、或いはミラーの光学的性質、使い方についてできるだけ簡潔に説明させていただく趣旨の“分かり易い照明光学シリーズ”をスタートさせて戴いた。今回はレンズの齎す理想像点を考えるための近軸理論の背景となる sinθの近似の精度について考へたい。

１．近軸理論の精度は？

前回お話しさせていただいたガラス、空気などが接する境界面における光線の屈折の方向はスネルの屈折則、

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad (1)$$

により計算できる。ここでの正弦関数 sinθは、無限の項数を持つ多項式を用いて

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \qquad (2)$$

と表現できた。

因みにこれは SIN のテイラー展開（Taylor expansion）であり、一般的な表現は

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{(2n+1)} \qquad （３）$$

である。

　さて、ここで角度θが微小である仮定してしまえば上式は

$$\sin\theta \approx \theta \qquad （４）$$

と簡単になる。スネルの屈折則も

$$n_1\theta_1 = n_2\theta_2 \qquad （５）$$

と簡単な式になる。これらの簡単式で光線の進み方を考えてしまおう、と言うのが近軸理論であった。そのとき、前回図 x における、収差という煩雑なものは消え去り、同じく前回図 x（B）における様な簡潔な体系内で光学系を考えることができる。さて、それでは実際に(3)式における SINθの近似は、θの値によりどの様に誤差を生むか考えてみよう。計算結果が下の表である。この中でθは角度であり表左の列は度数である。しかし(3)式において角度はラジアンという単位で計算しなければならない。その値を 3 行目に記す。(3)式において用いられる値である。(3)式に則り、3 次とあるのは、

$$\theta - \frac{\theta^3}{3!}$$

５次とあるのは

$$\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}$$

７次とあるのは、

$$\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!}$$

としてそれぞれ sinθを近似計算した値である。表 1 には直接その計算値を（sinθの値と比較して戴きたい。)、表 2 にはその時の sinθとの差を sinθの値で割った百分率で表している。

θ	sin θ	θ（rad）	3次	5次	7次
1	0.017452	0.017453	0.017452	0.017452	0.017452
5	0.087156	0.087266	0.087156	0.087156	0.087156
10	0.173648	0.174533	0.173647	0.173648	0.173648
15	0.258819	0.261799	0.258809	0.258819	0.258819
20	0.342020	0.349066	0.341977	0.342020	0.342020
25	0.422618	0.436332	0.422487	0.422619	0.422618
30	0.500000	0.523599	0.499674	0.500002	0.500000
35	0.573576	0.610865	0.572874	0.573583	0.573576
40	0.642787	0.698132	0.641421	0.642803	0.642787
45	0.707107	0.785398	0.704653	0.707143	0.707106
50	0.766044	0.872664	0.761902	0.766120	0.766044
55	0.819152	0.959931	0.812507	0.819299	0.819150
60	0.866025	1.047197	0.855801	0.866295	0.866021
65	0.906308	1.134464	0.891120	0.906779	0.906299
70	0.939693	1.221730	0.917799	0.940482	0.939676
75	0.965926	1.308997	0.935175	0.967202	0.965895
80	0.984808	1.396263	0.942582	0.986806	0.984753
85	0.996195	1.483530	0.939356	0.999239	0.996101
90	1.000000	1.570796	0.924832	1.004525	0.999843

表１　sin の近似計算

θ	sin θ	θ（rad）%	3次%	5次%	7次%
1	0.017452	0.005	0.000	0.0000	0.0000
5	0.087156	0.127	0.000	0.0000	0.0000
10	0.173648	0.510	-0.001	0.0000	0.0000
15	0.258819	1.152	-0.004	0.0000	0.0000
20	0.342020	2.060	-0.013	0.0000	0.0000
25	0.422618	3.245	-0.031	0.0001	0.0000
30	0.500000	4.720	-0.065	0.0004	0.0000
35	0.573576	6.501	-0.122	0.0011	0.0000
40	0.642787	8.610	-0.213	0.0025	0.0000
45	0.707107	11.072	-0.347	0.0051	0.0000
50	0.766044	13.918	-0.541	0.0099	-0.0001
55	0.819152	17.186	-0.811	0.0180	-0.0002
60	0.866025	20.920	-1.181	0.0312	-0.0005
65	0.906308	25.174	-1.676	0.0520	-0.0009
70	0.939693	30.014	-2.330	0.0840	-0.0018
75	0.965926	35.517	-3.184	0.1321	-0.0032
80	0.984808	41.780	-4.288	0.2029	-0.0055
85	0.996195	48.920	-5.706	0.3056	-0.0094
90	1.000000	57.080	-7.517	0.4525	-0.0157

表２　　sin の近似計算（%）

15 度くらいまでであれば、なんと sin θをθと乱暴に置き換えてしまっても誤差は 1%程度なのである。勿論これは一回の屈折についてだけの誤差であり、一本の光線は光学系内で何回も境界面と出会い屈折する可能性もある。また、光線と面が交わる座標もその都度ずれていくことになり（光線の角度と高さの誤差(図 1)、曲面形状の三角関数近似による誤差(図 2)）等も乗ぜられ誤差分布の範囲は急激に増えていくことになり、簡単には誤差は十分小さいのか？等の議論はできないが、単純に一回の屈折ではこれだけしか、角度の誤差は出ない、これは事実である。それに続く 3 次近似ではさらに誤差は小さくなる。60 度付近まで１%に達しないのである。５次、7 次収差になると、計算は大変になるが、さらに微小な誤差となる。この３次近似は精度、計算負荷、計算結果の見通しのバランスが良く、３次収差論という光学設計においては、１次近似の近軸理論と同様に、非常に重要な理論を形成する。以下には表 2 の結果の絶対値をとったグラフ（図 3）を示す。縦軸が誤差の%であり、横軸が０度から 90 度までの角度である。

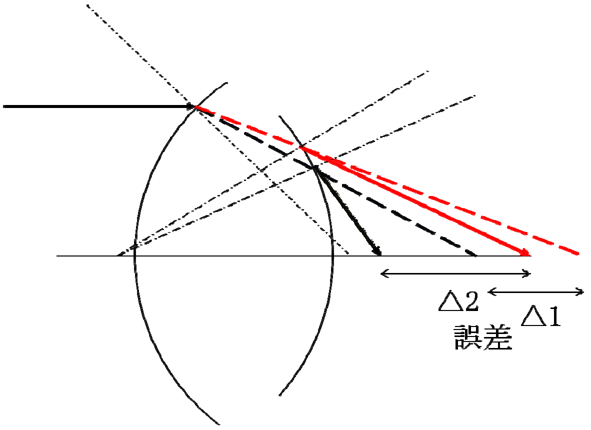

図1　　sin θ の近似　1　　屈折角度の誤差

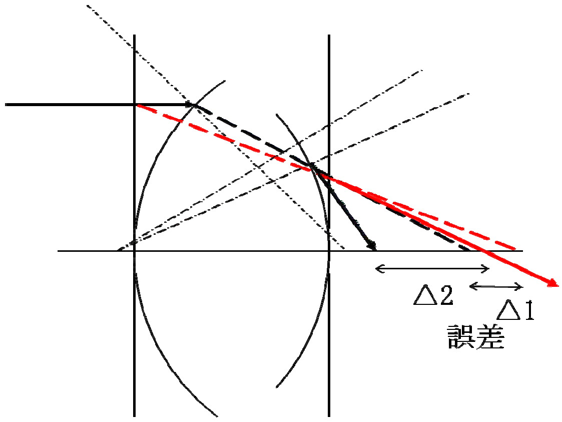

図2　　sin θ の近似　2　　＋曲面の平面化

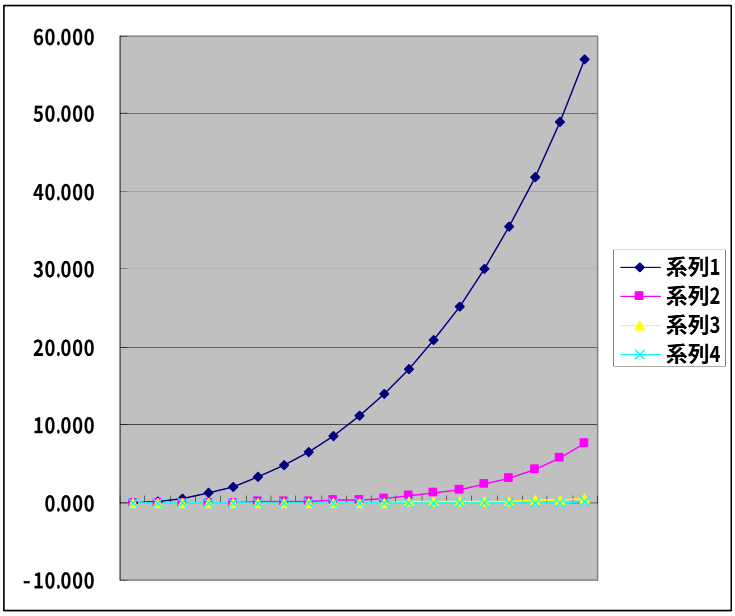

図 3　　sin の近似計算（%）

系列 1,2,3,4 がそれぞれ、1 次、3 次、5 次、7 次近似の誤差を表す。

2．参考図書

1)　小倉敏布：写真レンズの基礎と発展（朝日ソノラマ、東京、1995）

2)　高野栄一：レンズデザインガイド（写真工業出版社、東京、1993）

3)　松居吉哉：結像光学入門（JOEM、東京、1988）