提供：Optical Solutions
株式会社オプティカルソリューションズ
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8（MAS 三田ビル 3 階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/
e-mail:info@osc-japan.com

光学設計ノーツ　４２（ver.1.0）

結像における余弦則により正弦条件を求める

株式会社タイコ　牛山善太

本連載１７回よりクラウジウスの関係から、輝度不変則を導き、さらに正弦条件を導出した。また１８回においては共役関係にない二つの微小光斑の間でのストローベルの定理を導出し、エタンデューと呼ばれる量が得られた。

また１9 回では輝度不変則によらずに、17,18 回とは異なる考え方で正弦条件を導いた。今回はこの、19 回での手法を再び取り上げ、そこに含まれていた結像における余弦則というものをクローズアップし、輝度不変則、正弦条件、ハーシェルの条件等について改めて考えを廻らせたい。

１．　結像における余弦則

基本的は１９回１節における導出と同じであるが、軸外に範囲を一般化し、角度の取り方等も変えて、異なった表示方法を試みる。

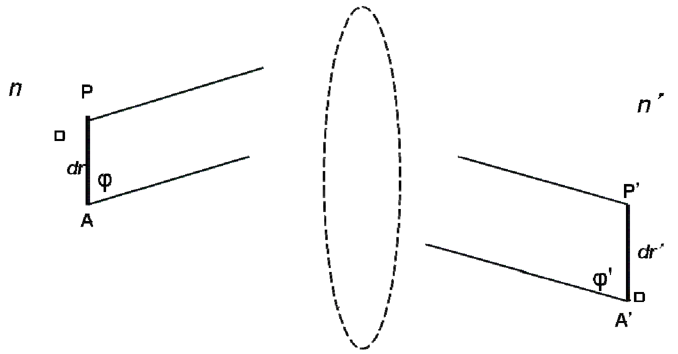

図１ 結像における余弦則

図１において、A の像 A'が収差無く結像していて、そこから微小距離 dr 離れた物点 P の像 P'にも同様の無収差の結像が起きているとする。まず、A から A'に到達する光線を考える。また同様に P を出発して P'に到達する光線を考える。両点において無収差結像が起こっているとすれば、こうした光線は無数にあるが、光線 AA'が線分 AP（つまり物体面を表す）となす角度をφとする。

また光線 PP'も物界では線分 AP に対し同じ角度φで P を出発しているとする。また像界では光線 AA'は像平面の一部、線分 A'P'（長さ dr'）に対してφ‘の角度を為して存在するとする。

さて、この時、AP の長さが微小であって光線 PP'も A'P'に対して同じように角度φ' をなしていると仮定しよう。すると、二つの光線の光路長を考えれば図から明らかな様に、

$$[PP'] - n'dr'\cos\phi' = [AA'] - ndr\cos\phi$$

$$[PP'] - [AA'] = n'dr'\cos\phi' - ndr\cos\phi \qquad （１）$$

となる。

ここで、A'においてのみならず、P'においても収差は存在しないわけであるから、射出の角度φが変化しても（１）式における両光線の光路長は一定なはずである。従って、こうした条件下では(1)式右辺が定数となり、

$$n'dr'\cos\phi' - ndr\cos\phi = C' \qquad （C'は定数） \qquad （2）$$

ここで、

$$\beta' = \frac{dr'}{dr} \qquad （3）$$

は、微小な線分同士の結像横倍率を表すとして、(2)式は

$$n'\beta'\cos\phi' - n\cos\phi = C \qquad （C は定数） \qquad （4）$$

と表せる。この（4）式を結像における余弦則（cosine roule）と呼ぶ。像面上、ある一点で収差が補正されているとき、その近傍の点でも収差が補正されている光学系においては（4）式の関係が常に成立しているはずである。

さて、ここで、検討すべきは像界で 2 光線が平行になっていると看做してよいかどうかである。実はこれと同様の検討は本連載 18 回で行っていて、ここに少し説明のしかたを変えて転記させて戴こう。18 回の場合には図 2 にある様に、線分 AP に直交する軸から計った光線の角度α、及び、α'を採用している。

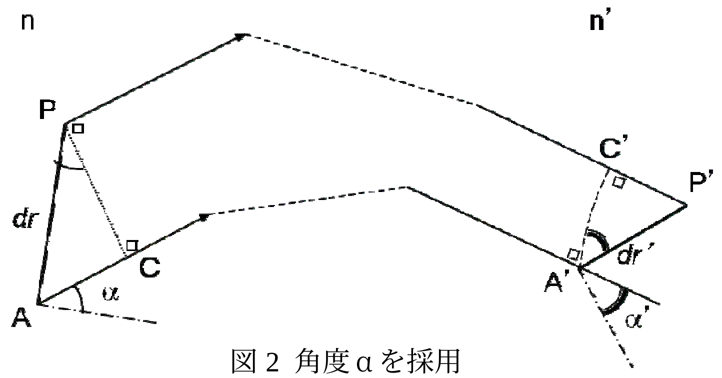

図 2 角度αを採用

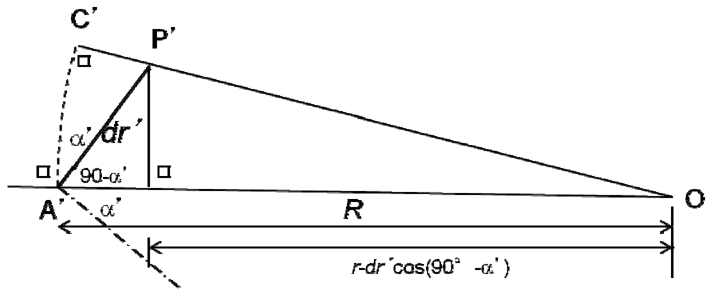

図 3　光路差の誤差について

もし、像界で 2 光線が平行にならないとすれば、どこかで 2 光線が交わることになる。そこで、A'から、この交点までの距離を R とすれば、(図 3 参照)

$$\overline{C'P'} = R - \sqrt{\left\{dr' \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)\right\}^2 + \left\{R - dr' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)\right\}^2} \qquad (5)$$

$$= R - \sqrt{\{dr' \cos\alpha'\}^2 + \{R - dr' \sin\alpha'\}^2}$$

計算して、整理すると、

$$\overline{C'P'} = R - R\sqrt{1 - \left(\frac{2dr' \sin\alpha'}{R} - \frac{dr'^2}{R^2}\right)}$$

R は、微小量 dr、dr'と比べて非常に大きな値となれば、根号内小括弧内の第 2 項は 4 次以上の微小量として無視できる。また、同第 1 項も 2 次以上の微小量であるから、一次近似の公式を用いて、

$$\overline{C'P'} \approx R - R\left(1 - \frac{1}{2}\frac{2dr'\sin\alpha'}{R}\right)$$

$$= dr'\sin\alpha' \qquad (6)$$

或いは、図１の様に角度φを用いれば

$$\overline{C'P'} = dr'\cos\phi' \qquad (7)$$

従って、上記(4)式が成立することになる。

物界から平行に入射した 2 光線は幾何光学的には、焦平面上で交わるはずである。例えば軸上の場合、この近軸焦平面から実際の像平面までの距離を R とすれば近軸理論的には [2)]

$$\frac{dr'}{R} = -\frac{dr}{n'f'} \qquad （８）$$

であって、drが焦点距離 f'に比して十分微小であれば、一般的に(8)式の左辺は 2 次以上の微小量を表す。(7)式により余弦則が成立する。しかし、特に軸外において 2 光線の射出瞳上の座標が何らかの理由により異常な位置になるとき、到達点は 2 光線とも夫々定まっているわけであるから、(8)式右辺においても、分母は焦点距離のオーダーであるから、2 光線が無視できない角度を為してしまう場合も考えられなくは無い。

そうした場合には、本連載 17 回における輝度不変則が成立しなくなる様に見えるが、そうでは無い。17 回の導出においては、余弦則の(2)式から、微小角度をα＋dβ（dβは２次程度の微小量）とした、もうひとつの余弦則の式を引き算する作業を行っているが、ここで、両式に微小な誤差があっても、それらは同程度のものであろうから、ほとんど相殺される。さらに、サジタル断面においての同様の余弦則の式が乗ぜられてエタンデューが計算される訳であるから、誤差の影響はさらに小さくなる。

２．　正弦条件

さて、上記のように角度についてα、α’を用いれば、(4)式は

$$n'\beta'\sin\alpha' - n\sin\alpha = C \qquad (9)$$

である。ここで、A が線分 AP に直交する光軸上にあり、光軸方向に光線が進むとすれば、(9)式の左辺の両項は０であり、この場合 C=0 であることが分かる。従って

$$n'\beta'\sin\alpha' = n\sin\alpha$$

$$\frac{n\sin\alpha}{n'\sin\alpha'} = \beta' \qquad (10)$$

であり、これまで、導出した正弦条件である。

３． ハーシェルの条件

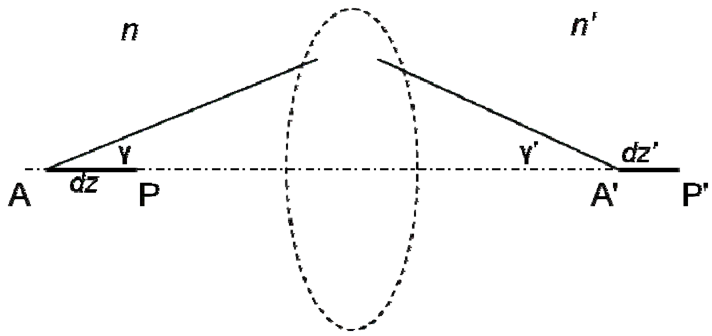

図４ ハーシェルの条件

正弦条件は像面上の点像の広がりにおいて定義されたが、図 4 にある様に、光軸上に沿った点像の存在に対しても同様の無収差条件を考えることが出来る。つまり、ある軸上像点において無収差の場合、そこから光軸上の、微小な距離はなれた像点が収差無く結像するための条件である。余弦則は、記述と同様に考えて、２光線が平行であるとみなせれば、

$$n'dz'\cos\alpha' - ndz\cos\alpha = C \qquad (11)$$

とできる。光軸に沿った光線を考えれば、

$$n'dz' - ndz = C \qquad (12)$$

であることが分かる。従って、

$$n'dz'\cos\alpha' - ndz\cos\alpha = n'dz' - ndz$$

$$n'dz'(\cos\alpha' - 1) = ndz(\cos\alpha - 1)$$

$$n'dz'\left(\sin\frac{\alpha'}{2}\right)^2 = ndz\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \qquad (13)$$

ここで縦倍率、

$$\gamma' = \frac{dz'}{dz} \qquad (14)$$

を導入すれば、

$$\frac{n}{n'}\left(\frac{\sin \alpha/2}{\sin \alpha'/2}\right)^2 = \gamma' \qquad (15)$$

となる。これがハーシェル(Herchel)の条件である。近軸領域では[2)]

$$\gamma' = \frac{n'}{n}\beta'^2 \qquad (16)$$

なので、

$$\left(\frac{n}{n'}\frac{\sin \alpha/2}{\sin \alpha'/2}\right)^2 = \beta'^2 \qquad (17)$$

となり、α＝±α'の時以外は正弦条件との両立はしない。

４．　参考文献

1）　鶴田匡夫：第 7･光の鉛筆　（新技術コミュニケーションズ、東京、2006）

2）　松居吉哉：レンズ設計法（共立出版、東京、１９７２）

3）　牛山善太、草川徹：シミュレーション光学（東海大学出版会、東京、2003）

４）　A.Walther: The Ray and Wave Theory of Lenses (Cambridge University Press,Cambridge,1995)