提供：
Optical Solutions
株式会社オプティカルソリューションズ
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8（MAS 三田ビル 3 階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/
e-mail:info@osc-japan.com

光学設計ノーツ　４３（ver.1.0）

光源の形状と照度の関係、そして NA について

株式会社タイコ
牛山善太

今回は、立体的な形状を持つ光源が、ある距離離れた微小平面にもたらす照度分布について考えてみよう。実用的に役立つ結果を得ることが出来る。また、そこから結像系の集光能力を表す開口数、NA についても言及する。

１．任意の形状の光源のもたらす照度

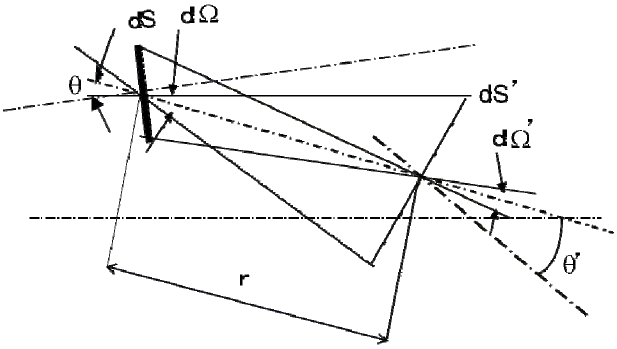

図1　光源面と受光面

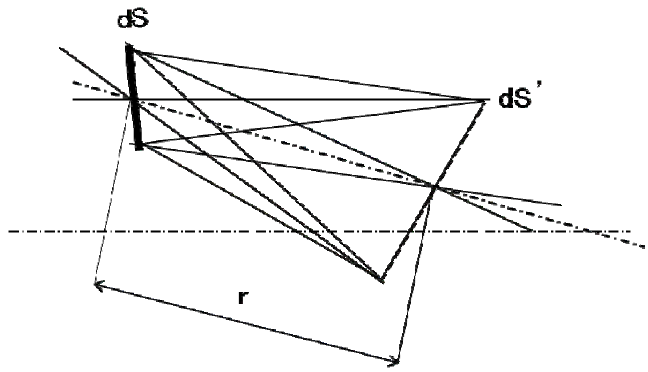

図2　光源面と受光面を結ぶ光線

微小光源面積 dS と微小受光面積 dS'、そしてそれぞれの面の法線と、互いの面中心同士を結ぶ長さ r の線分との為す角度を、図 1 にあるようにそれぞれ定める。すると、それぞれの面中心からそれぞれ向かい会う微小面積に張る立体角は、

$$d\Omega = \frac{dS'\cos\theta'}{r^2} \quad 、\quad d\Omega' = \frac{dS\cos\theta}{r^2} \qquad (1)$$

Optical Solutions Corporation http://www.osc-japan.com/

従ってこれらの式から、r^2を消して

$$dS\cos\theta d\Omega = dS'\cos\theta' d\Omega' \qquad (2)$$

となる。図２の様にそれぞれに向かう光線を書き入れると、光源と受光面の役割を入れ替えても方向は変化するが、光線経路は変化しないことがわかる。

ここで、光源がこの様に輝度 B で一様に光っているとすれば、受光面積 dS'に到達する光束ｄΦは

$$d\Phi = BdS\cos\theta d\Omega$$

（２）式から放射束は一定となり、

$$d\Phi = BdS'\cos\theta' d\Omega'$$

微小受光面上の照度ｄE'を考えれば、

$$dE' = \frac{d\Phi}{dS'} = B\cos\theta' d\Omega' \qquad (3)$$

となる。従って微小光源面が連続的に多数存在してそれらがｄS'を照らす場合にはそれぞれの光源面に等微小立体角ｄΩ‘を張るように光源面全体を細分化して（統合光源面が平面である必要は無い。(3)式には輝度と、立体角と、そして受光面から光源素を見込む角度しか現れていないので）　上記受光面上の照度は

$$E' = \int B\cos\theta' d\Omega' \qquad (4)$$

として微小立体角で積分する形で得られる。光源の形状に依存せず、光源を見込む角度と輝度分布ですべてが決まってしまうことになる。

もし輝度が一様な統合光源であれば

$$E' = B\int \cos\theta' d\Omega' \qquad (5)$$

と、より簡潔な形になる。

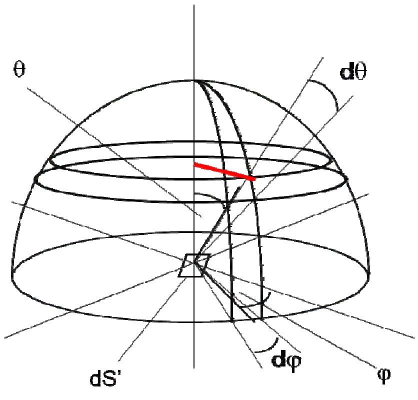

図3　立体角の設定

もし最大見込み角αの場合の円盤光源面を考えれば、これは、その曲率中心に微小受光面積を持つ、半径 P の球表面を見込み角αで丸く切り取った光源を考えるのと等価であるので、図 3 にある様に微小角度を設定して、(５)式を解く。立体角については、小円の半径 q は

$$q = P\sin\theta'$$

なので、（１rad は半径１の円周から長さ １ の円弧を切り出す、中心から張った角度であるから）

$$d\Omega' = \frac{P\sin\theta' d\varphi \cdot P d\theta'}{P^2} \qquad （６）$$

である。従って（５）式は以下の如くに表せる。

$$E' = B\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\cos\theta'\sin\theta' d\theta' d\varphi$$

$$= B\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha}\cos\theta'\sin\theta' d\theta'$$

$$= 2\pi B\left[\frac{\sin^2\theta'}{2}\right]_0^{\alpha}$$

従って、

$$E' = \pi B\sin^2\alpha \qquad （７）$$

となり、一様な輝度と、見込み角αにだけ依存することになる。(図 4)

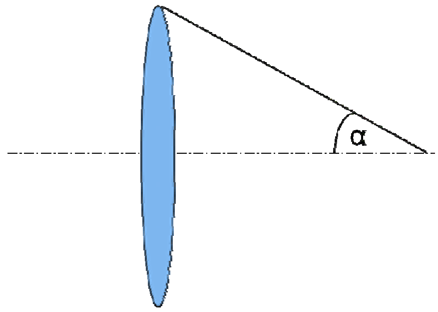

図4　射出瞳を見込む角度α、そしてNAについて

２．　NA について

さて、ここでの見かけ円盤状の光源を光学系の射出瞳とみなせば、そのまま(7)式は像面上中央の照度を表す。ここで物界の輝度を B_0 と表し、物界、像界の屈折率をそれぞれ n, n' とすれば、物界と像界の輝度については

$$B = \frac{n'^2}{n^2} B_0 \qquad (8)$$

の関係があるから[2)] [(12)式]、(7)式は

$$E' = \pi B_0 \frac{n'^2 \sin^2 \alpha}{n^2} \qquad (9)$$

となり、物界における光学系に入力される輝度の関数として像照度が得られる。Numerical Aperture (NA)、開口数という概念、

$$NA = n' \sin \alpha \qquad (10)$$

を用いると（９）式は以下の如くに表せる。

$$E' = \frac{\pi B_0}{n^2} NA^2 \qquad (11)$$

光源と像の役割を入れ替えた場合には（共役結像関係により可能である)、物界の方にも同様に開口数 NA_0 が考えられる。

$$E = \frac{\pi B}{n'^2} NA_0{}^2 \qquad (12)$$

(11)式を(12)式で割れば、

$$\frac{E'}{E} = \frac{\pi B_0}{n^2} \frac{n'^2}{\pi B} \frac{NA^2}{NA_0{}^2}$$

従って

$$\frac{E'}{E} = \frac{NA^2}{NA_0{}^2} \qquad (13)$$

この場合、物界、像界における放射束φは不変であるから、共役関係にある物体と像の微小面積を da、da' とすれば、βを結像の横倍率[1) P20]として

$$\frac{E'}{E} = \frac{\phi}{da'} \frac{da}{\phi} = \frac{1}{\beta^2} \qquad (14)$$

なので、以下の様に物界と像界の NA は横倍率を介して結ばれる。

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{NA^2}{NA_0{}^2} \qquad (15)$$

３．参考文献

1)　松居吉哉：レンズ設計法（共立出版、東京、１９７２）

2)　牛山善太：光学設計ノーツ第 17 回（オプティカルソリューションズ HP）
http://www.osc-japan.com/service/s05_17

3)　牛山善太：シミュレーション光学（東海大学出版、東京、2003）