

収差展開式における収差の分類

株式会社タイコ
牛山 善太

今回は、収差の多項展開式に現われる収差項（前回では現れなかった）の内容について検討し、光学系結像に存在する収差と言う混乱したものを出来るだけ整理して考えてみよう。以下では前回の収差展開式が前提となっているので、ご参照願いたい。

1 収差の展開式

像面上の理想像点からのズレ、収差は y 、 z 方向それぞれに、瞳座標、物体座標のべき級数展開関数として以下の如くに表現できる。

$$\Delta z = R \frac{\partial W_4}{\partial u'} = 4c_1 R (u'^2 + v'^2) u' + 2c_3 R y^2 u' + 2c_5 R y u' v' \quad - (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta y = R \frac{\partial W_4}{\partial v'} = & 4c_1 R (u'^2 + v'^2) v' + 2c_2 R y^2 v' + 2c_3 R y^2 v' \\ & + c_4 R y^3 + c_5 R y (u'^2 + v'^2) + 2c_5 R y v'^2 \quad - (2) \end{aligned}$$

上記、光線収差は物体位置、瞳座標の 3 次の項により表わされる範囲に限ったが、これらは収差を表す最低次の項であり、基本的な収差の性質を最も端的に現す。3 次収差と呼ばれる。また、 c_1 から c_5 までの光学系固有の 5 つの係数に付随して収差が分類される。これらを、ザイデル(Seidel)の 5 収差と呼ぶ。

上式においては、前回(6)式における様に、さらに高次の項が連続し存在していて、上記 3 次収差の場合と同様に、光線収差として 5 次の収差、7 次の収差を考えることができる。次数が増して加算されるごとに実際にスネルの法則により光線追跡された実収差の値に近づくことになる。しかし、各項は複雑になり、数も増え、見通しは悪くなる。

2 . ザイデルの 5 つの 3 次収差

ここで、前回におけるのと同様に瞳に極座標を導入し、

$$u' = r \sin \theta \quad , \quad v' = r \cos \theta$$

参照球面半径 R 、そして前回 (6) 式における係数を含んだ定数を適当にそれぞれ、 B, C, D, E, F とおけば、(1) (2) 式は、

$$\Delta z = Br^3 \sin \theta - 2Fyr^2 \sin \theta \cos \theta + Dy^2r \sin \theta \quad - (3)$$

$$\Delta y = Br^3 \cos \theta - Fyr^2(1 + 2\cos^2 \theta) + (2C + D)y^2r \cos \theta - Ey^3 \quad - (4)$$

と書ける。このとき、

$$B = 4c_1R \quad , \quad C = c_2R \quad , \quad D = 2c_3R$$

$$E = -c_4R \quad , \quad F = -c_5R$$

と置いている。

2 . 1 球面収差

ここで、順を追ってそれぞれの係数の項が単独で表わす収差について考えて行こう。まず、(3) (4) 式において B 以外の係数が 0 の場合を考える。すると、明らかに、

$$\Delta z = Br^3 \sin \theta \quad , \quad \Delta y = Br^3 \cos \theta \quad - (5)$$

これらの式から θ を消去すれば、

$$(\Delta z)^2 + (\Delta y)^2 = (Br^3)^2 \quad - (6)$$

瞳上の動径 r を一定値として、 θ を 0 から 2π まで変化させたとき、像面上の光線到着点の描く図形を収差曲線と呼ぶが、この場合は瞳上の高さ r の 3 乗に比例する半径の円が、像面上に描かれることが (6) 式より理解できる。絞りを開くと (瞳を通過する光線の r が大きくなることを意味するので) 球面収差は急激に増大する。また、物体高 y に (5) 式は影響を受けないので軸上 (像面中央) のみに残存する収差である。

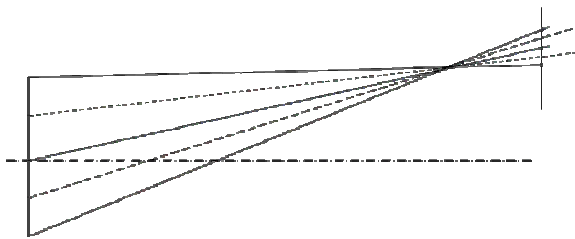


図1 焦点ずれ

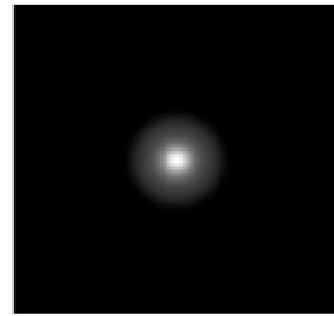


図2 球面収差のシミュレーション

図2に光軸上の点光源の、光学系による、球面収差を伴う結像の光線追跡、照度計算によるシミュレーションの結果を示す。本来、一点に再び集まるべき光が強度中心を取り囲むように存在するフレアとなっている。

球面収差は物点が光軸上にある場合の収差であるので、もし収差を上記の如く近軸像面上の z, y 方向（横収差）ではなく、 x 方向として光線が光軸を横切る座標（スネルの屈折則により、入射光と屈折光は同一平面上に存在するので、光軸と平行な場合以外は必ず交点は存在する）の近軸像点からの距離 x なる収差量（縦収差）に注目すれば、収差図形は回転対称であり、収差は瞳の光軸からの高さ r の偶数次のみの関数となる。4 次の項まで取れば、

$$\Delta x = Br^2 + B'r^4$$

と表せる。横収差では最低次数は 3 次であったので、上式で扱う光線は横収差座標では 3 次、5 次の球面収差を表すことになる。

さて、これらの、瞳の一番周辺 h のところから来る光線の収差を 0 と考えれば、

$$Bh^2 + B'h^4 = 0$$

$$B' = -\frac{B}{h^2}$$

であるから

$$\Delta x = Br^2 - B\frac{r^4}{h^2}$$

である。この関数を光線通過高さ r で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta x}{\partial r} &= 2Br - 4B\frac{r^3}{h^2} \\ &= 2Br \left(1 - 2\frac{r^2}{h^2} \right) \end{aligned}$$

従って、 x は、微分値が0となる、

$$r = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

の位置（光束の約7割の幅のところ）で最大値をとる。

2.2 コマ収差

(3)(4)式においてF以外の係数が0の場合を考える。すると、

$$\Delta z = -2Fyr^2 \sin \theta \cos \theta = -Fyr^2 \sin 2\theta \quad - (7)$$

$$\Delta y = -Fyr^2(1 + 2\cos^2 \theta) = -Fyr^2(2 + \cos 2\theta) \quad - (8)$$

これらの式から θ を消去すると、

$$(\Delta z)^2 + (\Delta y - 2Fyr^2)^2 = (Fyr^2)^2 \quad - (9)$$

すると、収差曲線は、理想像点から y 軸方向に $-2Fyr^2$ ずれた位置に中心を持つ、半径 Fyr^2 の円となる(図3)。

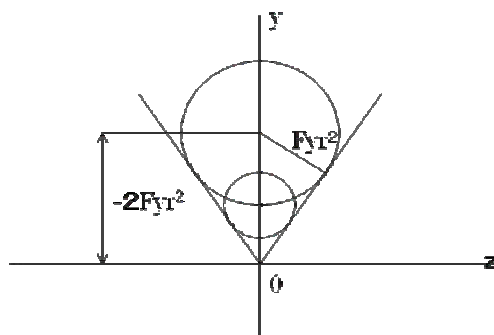


図3 コマ収差



図4 3次コマ収差のシミュレーション

左辺第2項から、理想像点から収差円中心までの距離が、収差円半径の2倍になるために、様々な r の値に対応して、理想像点を中心とした60度の開きを持つ2つの直線に接する様に、収差円が描かれる。この彗星状の形がコマ収差特有のものである。(9)式からも明らかな様にコマ収差は y が0でない場合、軸外結像においてのみ存在する収差である。瞳上の高さ r の2乗に比例して収差図形の円の半径が増大するので、球面収差ほどではないが、絞りを開くと急激にコマ収差は増大する。

図4に3次コマ収差が顕著な光学系による、軸外点光源の結像のシミュレーション結果を示す。

2.3 非点収差と像面湾曲収差

(16)(17)式においてC及びD以外の係数が0の場合を考える。すると、

$$\Delta z = Dy^2r \sin \theta \quad - (10)$$

$$\Delta y = (2C + D)y^2r \cos \theta \quad - (11)$$

これらの式から θ を消去すると、

$$\left(\frac{\Delta z}{Dy^2r} \right)^2 + \left\{ \frac{\Delta y}{(2C + D)y^2r} \right\}^2 = 1 \quad - (12)$$

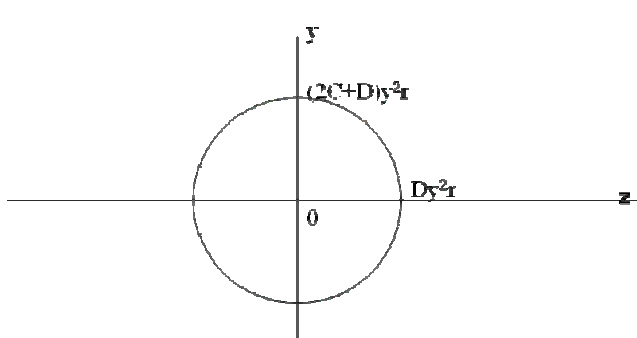


図5 像面湾曲と非点収差

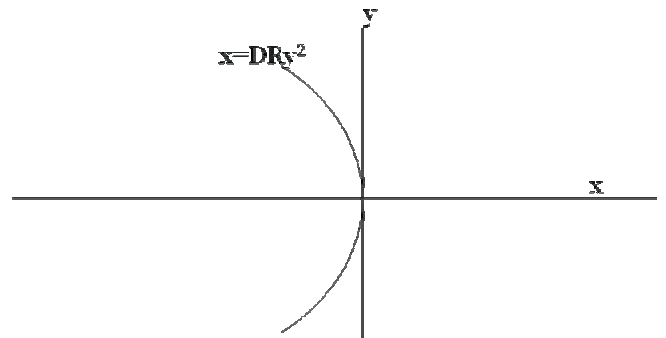


図6 像面湾曲

となり図5にある様に収差図形は理想像点を中心とし、頂点が Dy^2r 、 $(2C+D)y^2r$ の楕円となる。

もし、(12)式において、Cのみ0になるとすると、

$$(\Delta z)^2 + (\Delta y)^2 = (Dy^2r)^2 \quad - (13)$$

となり、収差図形は半径 Dy^2r の円となる。瞳上の高さ(半径)と像面上の高さ(半径)が比例すると言うことは、図1にもある通り光線はある一点に収束すること意味しているが(前回、図4参照)この場合の収束点はガウス像面上には存在していない。焦点ずれの収差(図1)と考え像面上で参照球面の移動量 dx に対応する焦点ずれの式

$$(\Delta z)^2 + (\Delta y)^2 = \left(\frac{dx}{R} r \right)^2$$

と比較することにより

$$dx = DRy^2 \quad - (14)$$

よって、収束点のずれ dx は物体高の 2 乗、すなわち一般的な場合像高の 2 乗に比例するので、像面は図 6 にあるように回転方物面状になる。この様な平面からの像面の湾曲を像面湾曲収差と呼ぶ。

さらに今度は、(10)(11)式にまで戻って、D のみ 0 になると考えると、

$$\Delta z = 0, \quad \Delta y = 2Cy^2r \cos\theta \quad - (15)$$

となり、収差図形は理想像点を中心とする、y 軸に沿った長さ $4Cy^2r$ の線分となる。

この事柄は、z 方向、つまりサジタル方向には無収差であるが y 方向、つまりメリディオナル方向には焦点ずれが生じていることを表わす。この様にサジタル、メリディオナル両平面内においての光軸方向の収束位置がことなる現象を非点収差と呼ぶ。因みに、 $2C+D=0$ の場合には、

$$\Delta z = Dy^2r \sin\theta, \quad \Delta y = 0 \quad - (16)$$

となり、サジタル方向の焦線を表わす。(図 7)

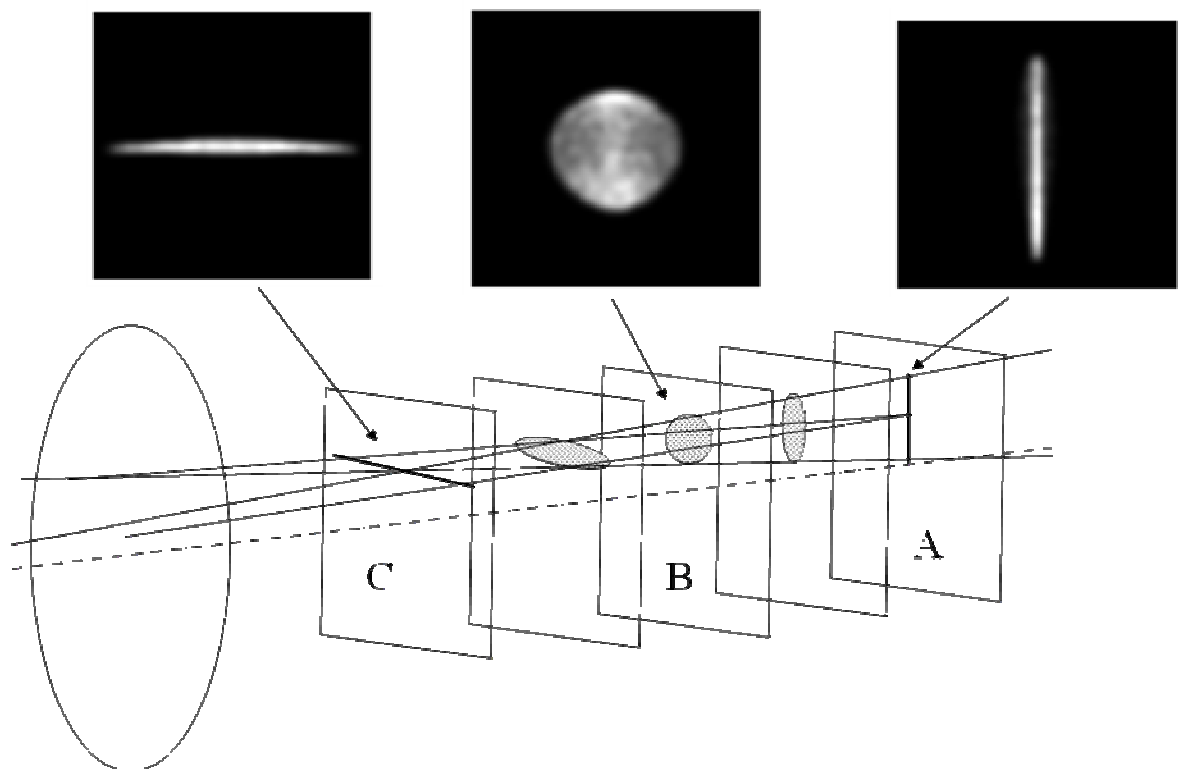


図7 非点収差、M、S焦線、最小錯乱円のシミュレーション

2.4 歪曲収差

(3)(4)式においてE以外の係数が0の場合を考える。すると、

$$\Delta z = 0, \quad \Delta y = -E y^3 \quad - (17)$$

(17)式で表わされる収差は、物体座標 y のみに依存する。この場合、瞳座標に依らないので、1点から射出した光線は明らかに1点に収束するのであるが、その収束点の位置は物体高の3乗に比例し理想像点からずれてしまう。像位置は物体高 y に対して正比例しないので像の形は物体の形と相似にならない。この収差を歪曲収差と呼ぶ。

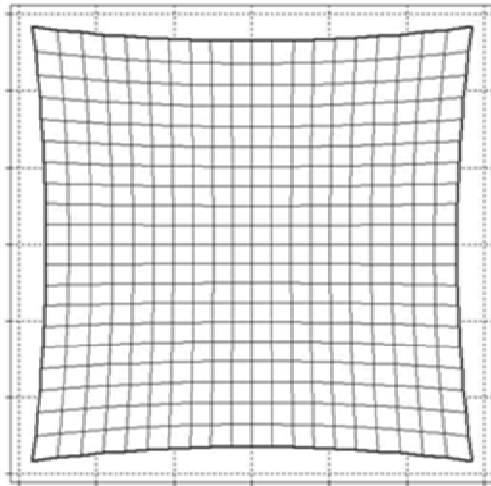


図8(1) 糸巻型歪曲収差

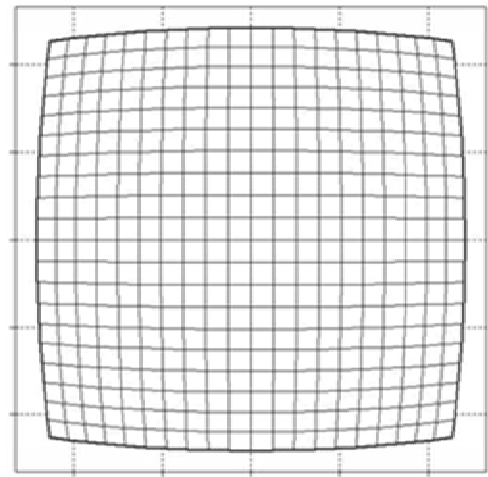


図8(2) 樽型歪曲収差

図8(1)(2)に、それぞれ正と負の歪曲収差により、正方格子像がそれぞれ糸巻型、樽型に歪められている様子を示す。

参考文献

- 1) 草川 徹: レンズ光学 (東海大学出版会、東京、1988)
- 2) 草川 徹: レンズ設計者のための波面光学 (東海大学出版、東京、1976)
- 3) 久保田広: 応用光学 (岩波書店、東京、1980)
- 4) 辻内順平: 光学概論 (朝倉書店、東京、1979)
- 5) 松居吉哉: レンズ設計法 (共立出版、東京、1972)
- 6) 村田和美: 光学 (サイエンス社、東京、1979)
- 7) 牛山善太、草川 徹: シミュレーション光学 (東海大学出版会、東京、2003)