〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8（MAS 三田ビル 3 階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/

光学設計ノーツ　４７（aver.1.0）

波面収差から得られる幾何光学的照度分布

株式会社タイコ
牛山善太

波面収差と光線収差の関係を表わす式を用いれば、光束の集光密度を計算し、波面収差から像面上の照度分布を求めることが可能であり、任意の次数の、任意の収差の存在する場合の照度分布を得ることができる。

ここで得られる数式は、多数の光線を追跡して得られるスポット・ダイヤグラムの様な計算機実験的な結果からではなく、幾何光学的強度の法則に基づく解析的な強度・照度分布を直接表わす。例えば Seidel の特定の３次、あるいは５次の収差を持つ光学系における理論的な幾何光学的照度分布を検討することにより（全ての幾何光学的収差が混在してしまうスポット・ダイヤグラムによる評価とは異なり、注目する収差のみの純粋な影響を取り出すことが出来る）、これらの収差固有の照度分布パターンを、また、幾何光学理論の限界などについて考察することも可能である。

幾何光学においては、波面収差などの収差関数から像面上の幾何光学的な照度分布を求め得る、後述させて頂く式は非常に重要な意味を持つ。

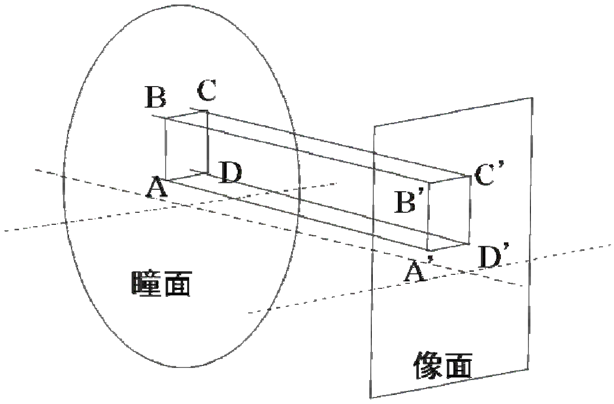
１．　幾何光学的照度分布

本連載１５回“波面収差と光線収差”において述べさせて頂いた通り、波面収差 W と光線収差 Δx、Δy の関係は、瞳上の光線通過座標を(u', υ')、参照球面の半径を R,像界の屈折率を１とすれば

$$\Delta x = R\frac{\partial W}{\partial u'}$$

$$\Delta y = R\frac{\partial W}{\partial \upsilon'} \qquad (1)$$

であった。



図—1　瞳面上と像面上の面積

ここで、瞳面上に図１にある様な、頂点 A,B,C,D を持つ矩形状の微小面積 dSを考えよう。各点の座標を以下の通り定める。

A(u', υ')
B(u', $\upsilon'+d\upsilon'$)
C($u'+du'$, $\upsilon'+d\upsilon'$)
D($u'+du'$, υ')

すると、これら４点を通過した光線による、これら瞳上の４点に対応する像面上の４点を A',B',C',D'とし、像面上、無収差で A 点の像が存在すべき点を座標原点にとれば、明らかに（１）式より、A'点の座標は

$$\mathrm{A}':R\left(\frac{\partial W}{\partial u'},\frac{\partial W}{\partial \upsilon'}\right) \qquad (2)$$

である。

また、D'点の x座標について考えると、それは瞳面上の u' の変化に対する、像面上での x方向の変化の感度に、実際の瞳面上での微小移動量 du' が掛け合わされた量(du'に起因する像面上の変化量)と、（２）式における x座標が足されたものになるので

$$x_{D'}=\frac{\partial}{\partial u'}\left(R\frac{\partial W}{\partial u'}\right)du'+R\frac{\partial W}{\partial u'}$$

となる。

また、y方向については、u'の変化に対する y方向の変化の感度に du' を掛けたものに（２）式の y座標を加えれば良いので

$$y_{D'}=\frac{\partial}{\partial u'}\left(R\frac{\partial W}{\partial \upsilon'}\right)du'+R\frac{\partial W}{\partial \upsilon'}$$

よって、D’の座標は

$$\mathrm{D}' : R\left(\frac{\partial W}{\partial u'} + \frac{\partial^2 W}{\partial u'^2} du' \ , \ \frac{\partial W}{\partial \upsilon'} + \frac{\partial^2 W}{\partial u' \partial \upsilon'} du'\right) \qquad (3)$$

であり、同様に考えてB’についても

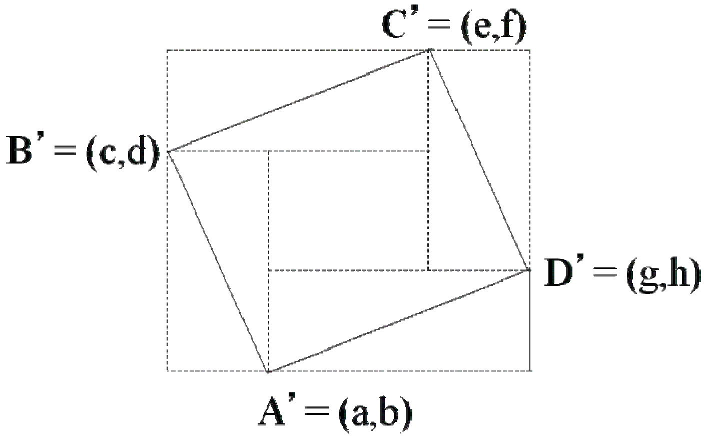
$$\mathrm{B}' : R\left(\frac{\partial W}{\partial u'} + \frac{\partial^2 W}{\partial u' \partial \upsilon'} d\upsilon' \ , \ \frac{\partial W}{\partial \upsilon'} + \frac{\partial^2 W}{\partial \upsilon'^2} d\upsilon'\right) \qquad (4)$$

となる。

また、C’の座標については像面上 x、y 両成分にそれぞれ、du'、$d\upsilon'$ の両変化の影響が現われるので

$$\mathrm{C}' : R\left(\frac{\partial W}{\partial u'} + \frac{\partial^2 W}{\partial u'^2} du' + \frac{\partial^2 W}{\partial u' \partial \upsilon'} d\upsilon' \ , \ \frac{\partial W}{\partial \upsilon'} + \frac{\partial^2 W}{\partial u' \partial \upsilon'} du' + \frac{\partial^2 W}{\partial \upsilon'^2} d\upsilon'\right) \qquad (5)$$

である。



図−2　座標による矩形の面積計算

さて、ここで図2にある様に矩形の4頂点の座標を定める時、

A’(a　,　b)
B’(c　,　d)
C’(e　,　f)
D’(g　,　h)

図形の面積 dS' は

$$dS' = \frac{1}{2}(g-a)(h-b) + \frac{1}{2}(a-c)(d-b) + \frac{1}{2}(e-c)(f-d)$$

$$+\frac{1}{2}(g-e)(f-h) + (d-h)(e-a) \qquad （６）$$

よって、(2)-(5)式を（６）に代入し（R^2を左辺に移しているが）、

$$\frac{1}{R^2}dS' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial u'} + \frac{\partial^2 W}{\partial u'^2}du' - \frac{\partial W}{\partial u'}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial \upsilon'} + \frac{\partial^2 W}{\partial u'\partial \upsilon'}du' - \frac{\partial W}{\partial \upsilon'}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial u'} - \frac{\partial W}{\partial u'} - \frac{\partial^2 W}{\partial u'\partial \upsilon'}\partial \upsilon'\right)\left(\frac{\partial W}{\partial \upsilon'} + \frac{\partial^2 W}{\partial \upsilon'^2}\partial \upsilon' - \frac{\partial W}{\partial \upsilon'}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial u'} + \frac{\partial^2 W}{\partial u'^2}du' + \frac{\partial^2 W}{\partial u'\partial \upsilon'}\partial \upsilon' - \frac{\partial W}{\partial u'} - \frac{\partial^2 W}{\partial u'\partial \upsilon'}\partial \upsilon'\right)$$

$$\times\left(\frac{\partial W}{\partial \upsilon'} + \frac{\partial^2 W}{\partial u'\partial \upsilon'}du' + \frac{\partial^2 W}{\partial \upsilon'^2}\partial \upsilon' - \frac{\partial W}{\partial \upsilon'} - \frac{\partial^2 W}{\partial \upsilon'^2}\partial \upsilon'\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial u'} + \frac{\partial^2 W}{\partial u'^2}du' - \frac{\partial W}{\partial u'} - \frac{\partial^2 W}{\partial u'^2}\partial u' - \frac{\partial^2 W}{\partial u'\partial \upsilon'}\partial \upsilon'\right)$$

$$\times\left(\frac{\partial W}{\partial \upsilon'} + \frac{\partial^2 W}{\partial u'\partial \upsilon'}du' + \frac{\partial^2 W}{\partial \upsilon'^2}\partial \upsilon' - \frac{\partial W}{\partial \upsilon'} - \frac{\partial^2 W}{\partial u'\partial \upsilon'}\partial u'\right)$$

$$+\left(\frac{\partial W}{\partial \upsilon'} + \frac{\partial^2 W}{\partial \upsilon'^2}\partial \upsilon' - \frac{\partial W}{\partial \upsilon'} - \frac{\partial^2 W}{\partial u'\partial \upsilon'}\partial u'\right)$$

$$\times\left(\frac{\partial W}{\partial u'} + \frac{\partial^2 W}{\partial u'^2}du' + \frac{\partial^2 W}{\partial u'\partial \upsilon'}\partial \upsilon' - \frac{\partial W}{\partial u'}\right)$$

単純に整理していくと、

$$\frac{1}{R^2}dS' = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial u'^2}du' \frac{\partial^2 W}{\partial u'\partial \upsilon'}du'\right) - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial u'\partial \upsilon'}d\upsilon' \ \frac{\partial^2 W}{\partial \upsilon'^2}d\upsilon'\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \upsilon'^2}d\upsilon' - \frac{\partial^2 W}{\partial u'\partial \upsilon'}du'\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u'^2}du' + \frac{\partial^2 W}{\partial u'\partial \upsilon'}d\upsilon'\right)$$

従って、

$$dS' = R^2\left\{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u'^2}\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \upsilon'^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial u'\partial \upsilon'}\right)^2\right\}du'd\upsilon' \qquad （７）$$

となる。(7)式右辺中括弧内は、(1)式を考慮した場合の関数行列式（ヤコビアン）である。像面上の光線通過域 dS’を

$$dS' = dxdy$$

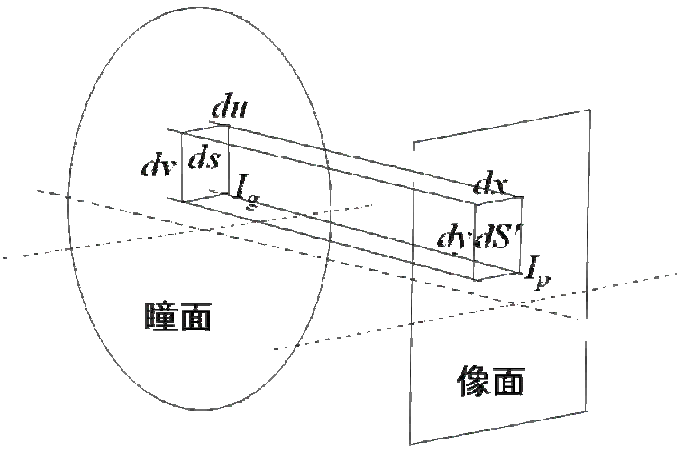
と表せば、

$$\frac{dS'}{dS} = \frac{dxdy}{du'd\upsilon'}$$

と考えられて、また

$$\frac{dxdy}{du'd\upsilon'} \propto \left\{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u'^2}\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \upsilon'^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial u'\partial \upsilon'}\right)^2\right\} \qquad （７．５）$$

である。



図—3　幾何光学的強度の法則

さらに、瞳上面積 dS を通過するエネルギーを、$I_p dS$ で表わせば(図３)、像面上、面積 dS' における照度を I_g として、幾何光学的強度の法則[6) P15]より

$$I_g = \frac{dS}{dS'} I_p \qquad (8)$$

よって、（７）式他より

$$I_g = \frac{I_p}{R^2}\left\{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u'^2}\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \upsilon'^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u' \partial \upsilon'}\right)^2\right\}^{-1} \qquad (9)$$

が得られる。この（９）式が波面収差 W から像面上の幾何光学的照度分布を表わす式となる。波面収差 W には本連載前回における Seidel の５収差の様な解析的な既知の（或いは任意な）値を用いることも出来る。

また、(7.5)式で表される、瞳と像面において対応する光線通過微小面積の比を、多数の光線追跡により表す手法がスポット・ダイヤグラムと考えることも出来る。

２． 参考文献

1) 草川 徹：レンズ光学 (東海大学出版会、東京、1988)
2) 草川 徹：レンズ設計者のための波面光学 (東海大学出版、東京、1976)
3) 久保田広：応用光学 (岩波書店、東京、1980)
4) 辻内順平：光学概論 I (朝倉書店、東京、1979)
5) 松居吉哉：レンズ設計法 (共立出版、東京、1972)
6) 牛山善太、草川 徹：シミュレーション光学 (東海大学出版会、東京、2003)
7) 応用物理学会光学懇話会編：幾何光学 (森北出版、東京、1984)