提供：Optical Solutions
株式会社オプティカルソリューションズ
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8（MAS 三田ビル 3 階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/

光学設計ノーツ　４８（ver.1.0）

球面収差係数による幾何光学照度分布の計算

株式会社タイコ
牛山善太

波面収差と光線収差の関係を表わす式を用いれば、光束の集光密度を計算し、波面収差から像面上の照度分布を求めることが可能であり、任意の次数の、任意の収差の存在する場合の照度分布を得ることができる。ここで得られる数式は、スポット・ダイヤグラムの様な計算機実験的な結果からではなく、幾何光学的強度の法則に基づく解析的な照度(強度)分布を直接表わす。今回は３次、あるいは５次の球面収差を持つ光学系を例に取り、この理論的な幾何光学的照度分布を検討することにより、これらの収差固有の強度分布パターンを、また、幾何光学理論の限界などについて考えたい。

１．　３次の球面収差と像面移動が存在する場合の幾何光学的照度分布

本連載 45 回において述べさせていただいた様に、波面収差は光学系の構成、物点位置により決められる係数 $a_0, b_0, b_1, \cdots$ をもちいて

$$
\begin{aligned}
W(0, y; u', \upsilon') &\equiv W\left(u'^2 + \upsilon'^2, y\upsilon', y^2\right) \\
&= a_0 + b_0 y^2 + b_1\left(u'^2 + \upsilon'^2\right) + b_2 y\upsilon' + c_0 y^4 + c_1\left(u'^2 + \upsilon'^2\right)^2 \\
&\quad + c_2 y^2 \upsilon'^2 + c_3 y^2\left(u'^2 + \upsilon'^2\right) + c_4 y^3 \upsilon' + c_5 y\upsilon'\left(u'^2 + \upsilon'^2\right) \\
&\quad + d_0 y^6 + d_1\left(u'^2 + \upsilon'^2\right)^3 + d_2 y^3 \upsilon'^3 + d_3\left(u'^2 + \upsilon'^2\right)^2 y\upsilon' + d_4 y^2\left(u'^2 + \upsilon'^2\right)^2 \\
&\quad + d_5 y^4 \upsilon'^2 + d_6\left(u'^2 + \upsilon'^2\right) y^4 + d_7\left(u'^2 + \upsilon'^2\right) y^2 \upsilon'^2 + d_8\left(u'^2 + \upsilon'^2\right) y^3 \upsilon' \\
&\quad + d_9 y^5 \upsilon' + \cdots \qquad (1)
\end{aligned}
$$

と表現することができる。ここでの係数 $a_0, b_0, b_1, \cdots$ は収差係数と呼ばれ、光学系の構成、物点位置により決められる。

ここで、4 次までの球面収差と光軸方向の焦点ずれの収差の項を抜き出し、これらの収差のみ存在すると考えれば、この時の波面収差 W は、係数を簡潔のため、c、b とすると

$$
W = c\left(u'^2 + \upsilon'^2\right)^2 + b\left(u'^2 + \upsilon'^2\right) \qquad (2)
$$

となる。右辺第１項が球面収差、第２項が焦点ずれの収差を表わす。

ここで、（2）式で表わされる収差が存在する場合の、像面上の結像による照度分布を、前回導いた（４７－９）式を用いて計算してみよう。像面上、軸上結像の理想像点位置、つまり原点からの光線到着点の距離の成分を(x, y)とすれば、（1）式の波面収差と光線収差の関係から

$$z(u', \upsilon') = R\frac{\partial W}{\partial u'} = R\left\{4c\left(u'^2 + \upsilon'^2\right)u' + 2bu'\right\} \tag{3}$$

$$y(u', \upsilon') = R\frac{\partial W}{\partial \upsilon'} = R\left\{4c\left(u'^2 + \upsilon'^2\right)\upsilon' + 2b\upsilon'\right\} \tag{4}$$

また、同様にして(3)、(4)式をさらに微分し、

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u'^2} = \left\{4c\left(3u'^2 + \upsilon'^2\right) + 2b\right\} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \upsilon'^2} = \left\{4c\left(u'^2 + 3\upsilon'^2\right) + 2b\right\} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u' \partial \upsilon'} = 8cu'\upsilon' \tag{7}$$

前回の(9)式、

$$I_g = \frac{I_p}{R^2}\left\{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u'^2}\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \upsilon'^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial u' \partial \upsilon'}\right)^2\right\}^{-1} \tag{47-9}$$

により照度分布式を求めると

$$I_g = \frac{4I_p}{R^2}\left\{12c^2\left(u'^2 + \upsilon'^2\right)^2 + 8bc\left(u'^2 + \upsilon'^2\right) + b^2\right\}^{-1} \tag{8}$$

となる。

瞳面上の座標 u'、υ' を変化させて（8）より得られる照度分布を図示すると、図 1(a)から(f)となる。係数bの中には観測面の移動量が含まれており、cを一定にしてbが変化し、異なる像面位置において計算された照度分布がそれぞれの図に示されている。この場合には、cは正の値にとってあり、bの負が大きくなると像面が光学系に近づく。図１においては、分布が光軸について回転対称なので回転軸から半分が描かれている。

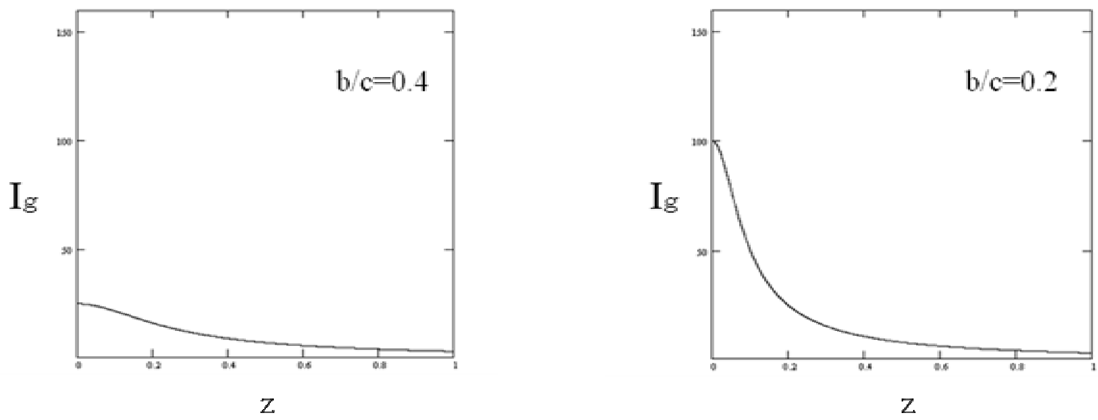

図1 (a)(b)　幾何光学照度分布 I_g － z

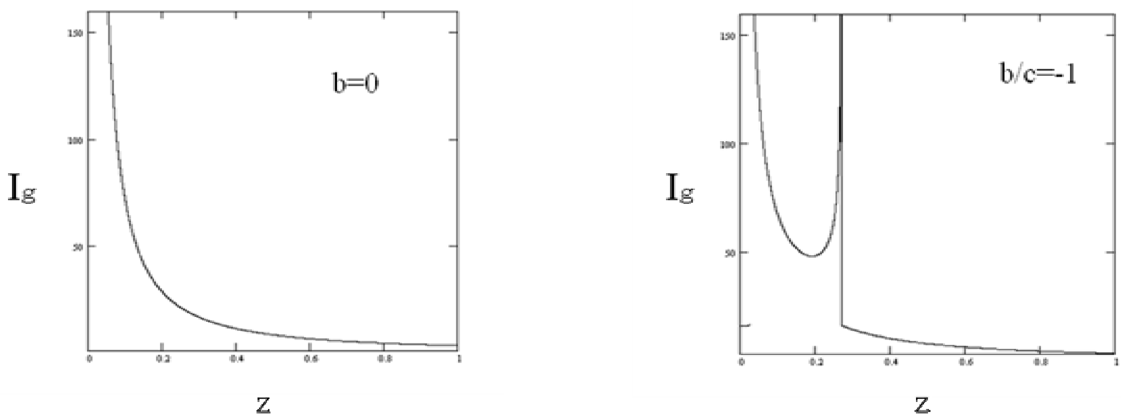

図1(c)(d)　幾何光学照度分布 I_g － z

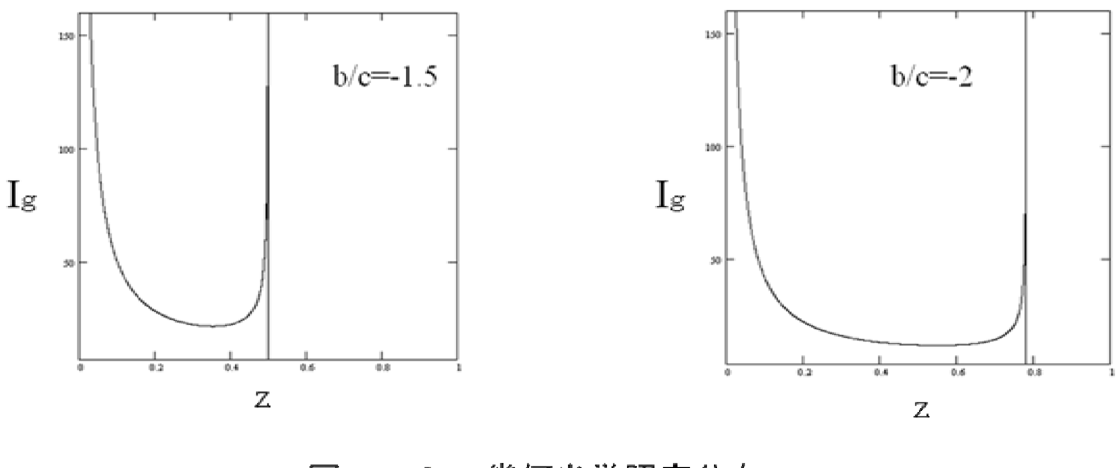

図1 (e)(f)　幾何光学照度分布 I_g － z

２．　照度の発散について

⑻式から明らかな様にそれぞれの図において

$$12c^2\left(u'^2+\upsilon'^2\right)^2+8bc\left(u'^2+\upsilon'^2\right)+b^2=0 \qquad (9)$$

の時、照度は無限大に近づく。この場合は（9）式より、以下の関係が成り立っている。

$$u'^2+\upsilon'^2=\frac{-b}{6c} \qquad (10)$$

$$u'^2+\upsilon'^2=\frac{-b}{2c} \qquad (11)$$

ここで、瞳上の極座標を導入し

$$u'=r\cos\theta \quad 、\quad \upsilon'=r\sin\theta \quad 、\quad r^2=\left(u'^2+\upsilon'^2\right)$$

と置いて、（3）（4）式より、辺々２乗して足し合せれば、像面上に描かれる円の軌跡の方程式が得られて

$$x^2+y^2=\left\{4Rc\left(r^3+\frac{b}{2c}r\right)\right\}^2 \qquad (12)$$

従って、(11)式は、画面中心部照度が無限大に発散している場合を表わし、(10)式の場合は、像面上

$$x^2+y^2=\left\{4Rc\left(r^3-3r^2\cdot r\right)\right\}^2$$

$$=\left(8Rcr^3\right)^2$$

$$=\left\{8Rc\left(\frac{-b}{6c}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^2 \qquad (13)$$

より表わされる半径の円周上において照度は無限大となる。

　また、像面上の動径ρ

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=4Rc\left(r^3+\frac{b}{2c}r\right) \qquad (14)$$

を考えると、両辺をrで微分して

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} = 4Rc\left(3r^2 + \frac{b}{2c}\right) \qquad (15)$$

すると、(11) 式は (15) 式における

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} = 0$$

の解であることが理解できる。つまり、瞳上座標の単調な変化に連れて、像面上の光線到着点の座標も変化するが、その動きの方向が変わる、ごく微小なｒの変化に対して、動きが止まる位置においては、無限小の面積に、有限の瞳面積からの有限なエネルギーを持つ光束が集まり、照度が無限大に発散する計算結果となる。勿論、この様な結果は現実には起こらない。光の波としての性質のために、無限小の面積に有限のエネルギーを持った光束が総て集光する様なことが起こり得ないからである。こうした幾何光学計算における留意点は次回で触れさせていただく予定である。

３．　5次収差を考慮した幾何光学的照度分布

上記３次に加えて５次の球面収差が存在する場合の照度分布計算結果を図2(a)から(c)に示す。

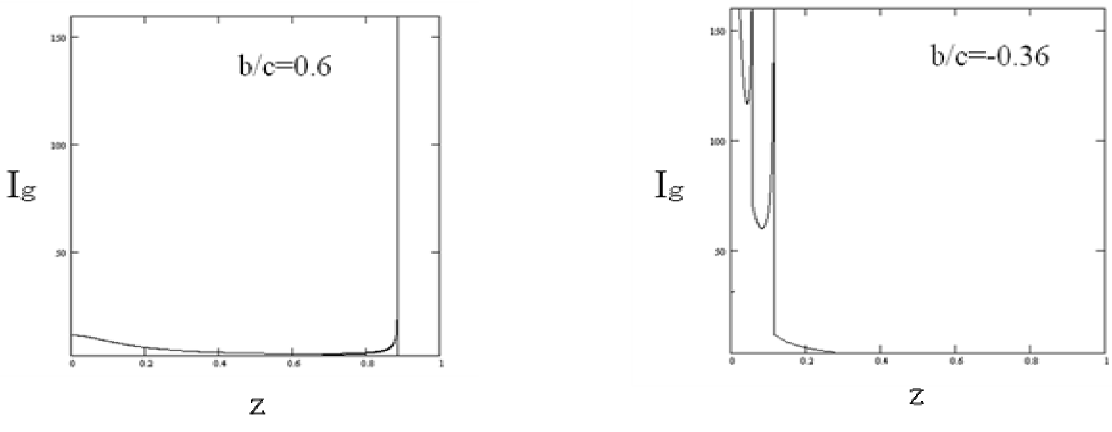

図2(a)(b)　3次、5次収差による幾何光学照度分布　Ig － z

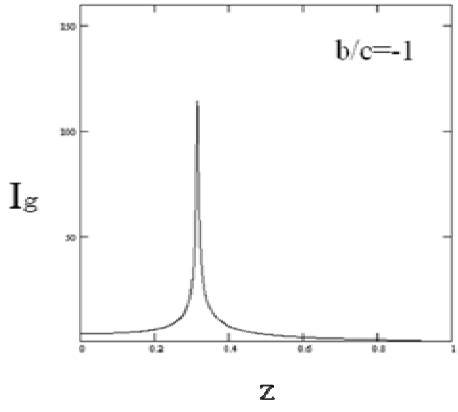

図2(c)　3次、5次収差による幾何光学照度分布　Ig － z

上述と殆ど同様な計算が行なわれるので詳しくは触れないが、基本となる波面収差 W は

$$W = c\left(u'^2 + \upsilon'^2\right)^2 + d\left(u'^2 + \upsilon'^2\right)^3 + b\left(u'^2 + \upsilon'^2\right) \tag{16}$$

と表わされる。

この計算においては上述と同じ量の正の３次収差を用い、それにバランスする様に、負の５次収差を設定してある。図２においては、図１の場合と異なる比例定数を用いているので、縦軸方向においては単純に比較できないが、横軸、x 座標は同スケールで描かれているので、３次収差のみの場合と比べ、高照度部周辺に広がるフレアが減少し、フレアを抑えた状態での光の芯も細くなっていることが容易に分かる。

また、b が、近軸結像位置を超えて正方向に増加する時（ボケて行く時）、３次収差のみの場合には、単調に分布の起伏が緩やかに変化して行くのに比べ、中心部の変化は３次のみの場合とあまり変わらないが、負の５次収差が存在する場合には、その影響で周辺部に図 2(a)における様な発散部を生じることが理解できる。

４．参考文献

1） 草川 徹：レンズ光学（東海大学出版会、東京、１９８８）
2） 草川 徹：レンズ設計者のための波面光学（東海大学出版、東京、1976）
3） 久保田広：応用光学（岩波書店、東京、1980）
4） 辻内順平：光学概論Ⅰ（朝倉書店、東京、1979）
5） 松居吉哉：レンズ設計法（共立出版、東京、１９７２）
6） 村田和美：光学（サイエンス社、東京、１９７９）
7） 牛山善太、草川 徹：シミュレーション光学（東海大学出版会、東京、2003）