提供：
Optical Solutions
株式会社オプティカルソリューションズ
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8（MAS 三田ビル 3 階）
TEL：03-5833-1332　　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/

光学設計ノーツ　４９（ver.1.0）

幾何光学照度分布計算においての留意点

株式会社タイコ
牛山善太

前回では波面収差と光線収差の関係を表わす式を用いて、光束の集光密度を計算し、波面収差から像面上の照度分布を求めた。任意の次数の、任意の収差の存在する場合の照度分布を得ることができ、そこで得られる数式は、スポット・ダイヤグラムの様な計算機実験的な結果からではなく、幾何光学的強度の法則に基づく解析的な照度分布を直接表わしていた。しかし同時に、光学系が無収差でなくとも、開口上の通過座標とともに変化する収差図形の動きが折り返す際に発生する火線（caustic）等において照度が無限大に発散してしまうなど、本来起きるはずの無い幾何光学独特の不都合も観察された。今回はこうした幾何光学理論を背景として実行される照度分布計算、そして OTF 計算などの限界などについて考えさせていただきたい。

１．　照度分布図上の発散

前回の解析的な幾何光学的照度分布図、図１においてはそれぞれ照度が無限大に発散してしまう部分が存在していた。

前回、述べさせていただいた様に、瞳上座標の単調な変化に連れて、像面上の光線到着点の座標も変化するが、その動きの方向が変わる、ごく微小なｒの変化に対して、動きが止まる位置においては、無限小の面積に、有限の瞳面積からの有限なエネルギーを持つ光束が集まり、照度が無限大に発散する計算結果となる。勿論、この様な結果は現実には起こらない。光の波としての性質のために、無限小の面積に有限のエネルギーを持った光束が総て集光する様なことが起こり得ないからである。

これらの幾何光学的発散点においては実際にも、高い照度が観察でき、この様な計算には、そこからシンプルに分布の座標的イメージが得られ、大きな意味がある。しかしながら、何れにしても幾何光学の理論的な限界は、こうした照度分布を考える際にも顕著となる。ヘルムホルツの方程式から得られる下記の（１）式において、波長λが限りなく０に近いとして幾何光学的近似を行う。

$$A\left(n^2-\left|\mathrm{grad}\,L\right|^2\right)+\frac{\Delta A}{k_0^2}+\frac{i}{k_0}\left(A\Delta L+2\,\mathrm{grad}\,A\,\mathrm{grad}\,L\right)=0 \quad (1)$$

ただしアイコナールを

$$L(x,y,z)=L$$

と表し、$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ をそれぞれ x 軸、y 軸、z 軸方向の単位ベクトルとするとき

$$\mathrm{grad}\, L = \frac{\partial L}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial L}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial L}{\partial z}\vec{k}$$

$$\Delta L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}$$

である。 また、λ_0 を真空中の波長として、

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

である。

（１）式において、λ_0 がごく小さい値であると看做せば、k_0 は非常に大きな数となり左辺第 2 項、第 3 項が無視でき、(1)式は

$$\left|\mathrm{grad}\, L\right|^2 = n^2 \qquad (2)$$

と、幾何光学的に光線の挙動を示すアイコナール方程式となる。

しかし明暗のはっきりした光と影の部分では、強度が急激に変わるので(1)式における振幅 A が場所により大きく変化し、左辺第 3 項の ｇrad$A$ が無視できない程の値になる。さらに、前回の場合の様に高密度に光線が集中している場所においても、(2)式に光線の進行方向を表す単位ベクトル s を導入して得られる、光線の進行経路を表す式、

$$n\vec{s} = \mathrm{grad}\, L \qquad (3)$$

の辺々に div をとれば、

$$\mathrm{div}\, n\vec{s} = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, L) = \Delta L \qquad (4)$$

となる。左辺は集光点を囲む微小体積の表面を通して集中・発散するエネルギーに比例した量を表している。従って高密度に光線が集中する場所では、上記(1)式における ΔL が大きな値となり得、左辺第 3 項を無視することが難しくなり、幾何光学的近似により場を表現できなくなる可能性がある。

スポット・ダイヤグラムを流用した手法とは異なる、光線追跡によるシミュレーション手法、光束法は光源から射出する微小な立体角内の光束を追跡し、この光束が像面上に到達する際に生じる光斑の面積から像面照度を計算する手法で、上述の理論的導出における像面上の面積計算を、波面収差の微分からではなく光線追跡によって求めるものである。この幾何光学的強度の法則に忠実なシ

ミュレーション手法においては、やはり上述の場合と同様にして、光斑の面積が非常に小さくなり、照度の発散が起こり得、この様な像面部分での定量的照度解析が困難になる。

一方、スポット・ダイヤグラムの発展型と考えられる粒子法（非常に多くの光線を発射することにより行われる）においては、照度は像面上に設定された画素の有限な面積と、そこに到着する有限な光線エネルギーによって計算される。このことは、エネルギーが、有限な面積を持つ画素ごとに平均化されることを意味し、又、サンプル数も有限であるので、こうした発散は起こりにくい。

２．　幾何光学的 OTF 計算についての考察

一般的に幾何光学的 OTF 計算として行われる計算と、それに対してモンテカルロ法を用いてチャートの結像シミュレーションを実施しチャート像のコントラストから、或いは幾何光学的 PSF シミュレーション結果をフーリエ変換し OTF 計算した場合の結果の相違について検討してみよう。以下での波動光学 OTF 式から幾何光学 OTF 式への変換については参考文献１）P113 において論じられている。

参考文献 2）P138（4.16）式より幾何光学的 OTF は、

$$OTF_G(s,t) = \frac{1}{A}\iint_S \exp[-2\pi i\{s\cdot x(u,v) + t\cdot y(u,v)\}]dudv \qquad (5)$$

として得られる。S は瞳領域、A は瞳面積を表す。

一方、波動光学的 OTF は、参考文献 3）P179(25),(26)式から、瞳の領域を

$S(u,v)=1$　　瞳領域内

$S(u,v)=0$　　瞳領域外

として表す関数 $S()$を用いて、

$$OTF(s,t) = \frac{1}{A}\int\int_{-\infty}^{\infty} S(u-\lambda Rs, v-\lambda Rt)S(u,v)\cdot$$

$$\exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda}\{W(u-\lambda Rs, v-\lambda Rt) - W(u,v)\}\right]dudv \qquad (6)$$

と表せる。ここにλは波長、R は瞳中心から強度分布中心までの主光線に沿っての距離、u, v は瞳座標、s, t は、それぞれサジタル方向、メリジオナル方向の空間周波数である。因みに、R=10、s=100、λ=0.000587 であれば、

$$\lambda Rs = 0.587$$

である。

さてここで、（6)式の exp 内の項を考えると $\lambda RS, \lambda Rt$ が十分に小さい値であると看做せれば、

$$\{W(u-\lambda Rs, v-\lambda Rt) - W(u,v)\}$$

$$= \frac{-\lambda Rs\{W(u+\lambda Rs, v) - W(u,v)\}}{\lambda Rs} + \frac{-\lambda Rt\{W(u, v+\lambda Rt) - W(u,v)\}}{\lambda Rt}$$

$$\approx -\lambda Rs\frac{\partial W}{\partial u}-\lambda Rt\frac{\partial W}{\partial v}$$

従って(6)式は

$$OTF(s,t)=\frac{1}{A}\int\int_{-\infty}^{\infty}S(u-\lambda Rs,v-\lambda Rt)S(u,v)\cdot$$
$$\exp\left[-2\pi i\left\{sR\frac{\partial W}{\partial u}+tR\frac{\partial W}{\partial v}\right\}\right]dudv \qquad (7)$$

また、参考文献 2）P119(3.16)(3.17)式の波面収差と光線収差を表す関係式から、像界の屈折率が 1 であれば、

$$\Delta x = R\frac{\partial W}{\partial u}$$
$$(8)$$
$$\Delta y = R\frac{\partial W}{\partial v}$$

となるので、(7)式は

$$OTF(s,t)=\frac{1}{A}\int\int_{-\infty}^{\infty}S(u-\lambda Rs,v-\lambda Rt)S(u,v)\cdot$$
$$\exp[-2\pi i\{sx(u,v)+ty(u,v)\}]dudv \qquad (9)$$

となり、幾何光学的 OTF（5）式とは酷似し、積分領域のみ異なる。もしλ→0と近似すれば積分内前半の表す積分有効範囲は瞳領域と一致し、(9)式は(5)式と全く同じになり、幾何光学的(近似)OTF 計算の正当性が示される。すると、この近似で最も肝要となる部分は

$$\frac{\{W(u+\lambda Rs,v)-W(u,v)\}}{\lambda Rs}+\frac{\{W(u,v+\lambda Rt)-W(u,v)\}}{\lambda Rt}\rightarrow\frac{\partial W}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial v}$$

の置き換えの部分であり、波面上において、差分による傾きが、微分による傾きに置き換えられるか否かが、幾何光学的 OTF 計算を考える上で第一に重要に成る。λRS, λRt が波面の構造に対して十分に小さい値と看做せるかどうかという問題である。

従って波面にサンプリング間隔に不相応な凹凸が存在する場合には、大きく幾何光学的 OTF 計算は誤差を含むことになる。

屈折率が、大きな関数に対して小刻みに、場所により変化している場合、あるいは面に微小な凹凸が存在する場合などには、明らかに位相差もそれに付随して変化し、波面形状も微少な凹凸を持つことになる。従って、こうした場合、波動光学的 OTF 計算を施す事が妥当である。

ところが、もし通常の結像光学系と比べ大きな収差を持つ、しかも上記の如くの留意を必要とする光学系が存在するとすれば、その計算に際しては、波動光学的計算は瞳分割、像領域の問題から実用的には非常に計算の負荷が大きい。そこで、こうした光学系に対において、照明計算における如く、多数の光線を発生させてその強度分布を一旦得て、その結果をフーリエ変換し MTF を計算することは、射出瞳座標が一切介在しない計算を行うことになり、より、波動計算結果に近接する効果が含まれるとも思われる。

参考文献

1）宮本健郎“光学入門”（岩波書店、1995、東京）
2）牛山善太“シミュレーション光学”
3）牛山善太“波動光学エンジニアリングの基礎”