提供：Optical Solutions
株式会社オプティカルソリューションズ
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8（MAS 三田ビル 3 階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/

LED **照明ノーツ　5**

基本的な反射、拡散における BSDF について

株式会社タイコ
牛山善太

前回は物質表面の反射・拡散・透過特性を表す関数、BSDF の基本的な定義・性質について説明させていただいた。理論的な様々な数式からこの関数を決定する事は勿論可能であるし、測定値からこの関数を決定していく事も可能であると言う、実に応用性に富んだ概念である。またどの様な BSDF 関数が、換言すれば、拡散分布が、使用目的を達成するために、光学要素の表面に施されるのが適当か？等の解析的な考察にも役に立つ。今回はそうした折にも有用である、完全拡散、整反射などの基本的な光学現象における BSDF 関数について触れさせていただきたい。

１．　BRDF による強度反射率の表現

前回における BSDF の定義を再び記させていただけば、以下の通りである。

$$BRDF(\vec{\omega}_i,\vec{\omega}_r)=\frac{dL_r(\vec{\omega}_r)}{dL_i(\vec{\omega}_i)\cos\theta_i d\omega_i} \qquad (0)$$

微小面積 dA への入射光全体の齎す、特定の方向への反射輝度は、当然のこと、dA を囲む半球全体の立体角の積分として、以下の様に表わされる(図 1)。

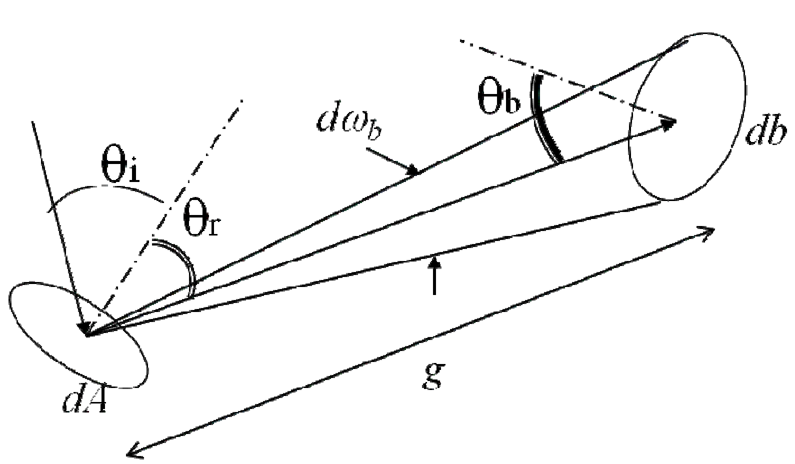

図1　BRDFの考察

$$L_r(\vec{\omega}_r) = \int_{\Omega_i} BRDF(\vec{\omega}_i, \vec{\omega}_r) \cdot L_i(\vec{\omega}_i) \cos\theta_i d\omega_i \qquad (1)$$

また、強度反射率 R は入射と反射のエネルギーの比、

$$R = \frac{I_r}{I_i} \qquad (2)$$

として表わされた。よって、(1)式をさらに、反射角度を考慮し、反射方向半球の全立体角について積分すると、単位面積から反射される全エネルギー・放射発散度が計算できるので、これを全体の入射光による照度で割れば、(2)式と同様の計算が成り立ち、以下の様に、強度反射率 R が得られる。

$$R = \frac{\int_{\Omega_r}\int_{\Omega_i} BRDF(\vec{\omega}_i, \vec{\omega}_r) \cdot L_i(\vec{\omega}_i) \cos\theta_i \cos\theta_r d\omega_i d\omega_r}{\int_{\Omega_i} L_i(\vec{\omega}_i) \cos\theta_i d\omega_i} \qquad (3)$$

２．　整反射における BRDF

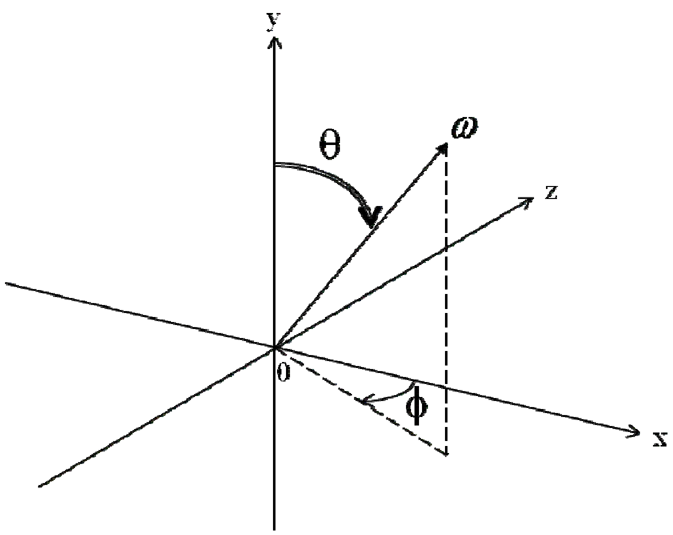

図２　　角度、方位座標

ここで、媒質境界面おいての、強度反射率 100%の完全な反射を仮定し、BRDF の用いられ方の一例として、その場合の BRDF について考えてみよう。図 2 にある様に入射・射出方向を、法線との角度θ、方位をϕで表わせば、完全な反射の場合、スネルの反射則より、

$$\theta_r = \theta_i \qquad 、 \qquad \phi_r = \phi_i \pm \pi \qquad (4)$$

完全な反射であれば、入射光と反射光の輝度は等しいので、

$$L_r(\theta_r,\phi_r)=L_i(\theta_r,\phi_r\pm\pi) \tag{5}$$

となる。また、立体角について考えれば、半径 r の円の、角度 a ラディアンの扇形の円弧の長さは ar なので、(4)式の立体角の積分を角度、方位の積分に書き換えて、

$$L_r(\theta_r,\phi_r)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} BRDF_{ir}\cdot L_i(\theta_i,\phi_i)\cos\theta_i\sin\theta_i d\theta_i d\phi_i \tag{6}$$

となる。ここで、デルタ関数を考えれば、

$$x\neq 0 \quad \text{であれば} \quad \delta(x)=0$$

そして、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$$

よって、上記(４)、(５)式の条件を成立させるためには、以下の値が BRDF 値として推測される。

$$BRDF_{ir}=\frac{\delta(\theta_i-\theta_r)\cdot\delta\{\phi_i-(\phi_r\pm\pi)\}}{\cos\theta_i\sin\theta_i} \tag{7}$$

因みにこの(7)式を(6)式に代入すると、デルタ関数の別の性質、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-y)f(x)dx=f(y) \tag{8}$$

より、

$$L_r(\theta_r,\phi_r)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\delta(\theta_i-\theta_r)\cdot\delta\{\phi_i-(\phi_r\pm\pi)\}L_i(\theta_i,\phi_i)d\theta_i d\phi_i$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\delta(\theta_i-\theta_r)L_i(\theta_i,\phi_r\pm\pi)d\theta_i$$

$$=L_i(\theta_r,\phi_r\pm\pi) \tag{9}$$

となり、(5)式を成立させる BRDF の値であることが理解できる。また、非誘電体境界面においては、フレネル反射強度[7) P236] を(7)式右辺に乗じ、フレネル反射を考慮した BRDF を設定でき、さらにコーティングの影響も入射角度の関数として付加することも可能となる。この様な場合には当然、同時に生起する透過光に対する BTDF による計算が必要になる。

３． 完全拡散面におけるBRDF

完全拡散（Lambasian）面反射におけるBRDFについて検討してみよう。定義（その名）の通り完全拡散面においては如何なる角度で光線が入射しようとも、反射輝度はどの方向に対しても一様になる。つまり、BRDFも一定の値になるので、この場合(1)式は、

$$L_r(\vec{\omega}_r) = BRDF\int_{\Omega_i} L_i(\vec{\omega}_i)\cos\theta_i d\omega_i$$

$$= BRDF \cdot E_i \tag{10}$$

となる。ここで、完全拡散における反射率を、上記の通り入射全放射束と反射全放射束との比で表わせば、式中から面積が消えて、(3)式から、

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\int_{\Omega_r} L_r(\vec{\omega}_r)\cos\theta_r d\omega_r}{\int_{\Omega_i} L_i(\vec{\omega}_i)\cos\theta_i d\omega_i}$$

(10)式より、

$$= \frac{BRDF \cdot E_i \int_{\Omega_r} \cos\theta_r d\omega_r}{E_i}$$

$$= \pi \cdot BRDF \tag{11}$$

となり、

$$BRDF = \frac{R}{\pi} \tag{12}$$

なる関係で、強度反射率とBRDFは結ばれる。仮に透過・吸収が無ければBRDFは1/πとなる。斯様に反射率と、完全拡散の様な面の特性を同時に表現できるのがBRDFの優れているところでもある。

４．　直接透過光におけるBTDFの計算

ここで、既出第２節の整反射におけるBRDFと対を成す、スネルの法則で表わされる透過光についてのBTDFについて簡単に触れさせて戴く。この場合にも(6)式と同様の式が入射光と透過光、BTDFについて成り立つ訳であるが、フレネル強度透過率を T で表わせば、クラウジウス（Clausius）の関係[7) P64、8) (10)式]、

$$n^2 \cos\alpha dS d\Omega = n'^2 \cos\alpha' dS' d\Omega' \qquad (13)$$

と、反射・吸収がない場合の放射束の保存性、

$$L \cos\alpha dS d\Omega = L' \cos\alpha' dS' d\Omega' \qquad (14)$$

から、

$$L = \left(\frac{n}{n'}\right)^2 L' \qquad (15)$$

となるので、

$$L_t(\theta_t, \phi_t) = T\left(\frac{n_t}{n_i}\right)^2 L_i(\theta_i, \phi_r \pm \pi) \qquad (16)$$

と言う輝度同志の関係が導かれる。更に、球表面上での帯面積と球の直径に投影した帯の巾との関係[7) P45]、

$$\Delta s = 2\pi r dx \qquad (17)$$

を考えれば、これはつまり、球半径の r が決まれば、球面上のこの様な帯の表面積は、帯を切り取る、二つの円盤の x 軸上の間隔 dx のみにより決まることを意味するが、この場合、

$$dx = d(\cos\theta_i) \qquad (18)$$

と考える事ができるので帯の面積は、

$$\Delta s = 2\pi d(\cos\theta_i)$$

となり、角度 dϕの動きにより切出される帯上の弧の長さは dϕ/2πとなるので、微小立体角を、

$$d\omega_i = 2\pi d(\cos\theta_i) \cdot \frac{d\phi_i}{2\pi} \qquad (19)$$

と表わすことが出来る。また、この後 BTDF を求める際に、スネルの屈折則を反映させるために、デルタ関数の中の変数が sinθの形になってしまう。そこで本文中のデルタ関数の性質を利用するために積分変数を sinθの形に一致させておく必要が生じる。ここで、

$$d\left(\cos\theta_i\right)=\tan\theta_i d\left(\sin\theta_i\right)$$

なる関係を利用して、

$$d\omega_i=\tan\theta_i d\left(\sin\theta_i\right)d\phi_i \qquad (20)$$

として(8)式と同様の形式の積分を行なうとすれば、

$$BTDF_{it}=T\left(\frac{n_t}{n_i}\right)^2\frac{\delta\left(\sin\theta_i-\frac{n_t}{n_i}\sin\theta_t\right)\cdot\delta\left\{\phi_i-\left(\phi_t\pm\pi\right)\right\}}{\sin\theta_i} \qquad (21)$$

と BTDF を設定することが出来る。上記の BRDF の場合と同様の検証が可能である。

5．参考文献

1) J.C.Stover:Optical Scattering(SPIE Press,Bellingham,1995)
2) E.F.Church & P.Z.Takacs:SCATTERING THEORY,HAND BOOK OF OPTICSI (McGraw-Hill,New York,1995)
3) M.F.Cohen,J.R.Wallace:Radiosity and Realistic Image synthesis (Morgan Kaufmann,San Francisco,1993)
4) F.E.Nicodemus,et al.:"Geometrical Considerations and Nomenclature for Reflectance",NBS Monograph 160,1977
5) "TracePro Users Manual"（Lambda Research Corp.,Littleton,1995）
6) **鶴田匡夫:第 5・光の鉛筆(新技術コミュニケーションズ,東京,2000)**
7) **牛山善太：シミュレーション光学（東海大学出版、東京、2003）**
8) **牛山善太:光学設計ノーツ第** 17 **回**（**オプティカルソリューションズ** HP）
http://www.osc-japan.com/service/s05_17