

## 表面の粗さについての考え方

株式会社タイコ  
牛山善太

今回は、本連載中の BSDF についての回でも触れた<sup>3)</sup>、光の回折・拡散・散乱 (BSDF はこれらの現象を定量的に表現するためのものであるが) の原因となる物質表面の粗さについて考えてみよう。ここでは表面荒さについての最もシンプルな表現方法について解説させていただきたい。

### 1. 正弦波状表面における散乱

この回では、非常に滑らかでクリーンな正弦波状の鏡面による散乱を考えよう。これは言わば一つの回折であって、これから、一般的な表面粗さを考える上で、それらを様々な周波数の正弦波の合成による表面形状と見なすことにより、散乱光からその面形状を、定量的に認識することが出来、たいへん重要になる考え方である。

さて、本稿で扱う“滑らか”という言葉は、表面の高低の差が波長よりも小さいことを意味する。そして、クリーンで鏡面という言葉は、散乱が表面の形状 (地形) により生ずる回折に支配されていて、表面、或はその直下に含まれる異物質により生起される現象でないことを表わす。

図-1 における配置を考えよう。表面上の正弦波は、 $x$  軸方向にのみ変化する、

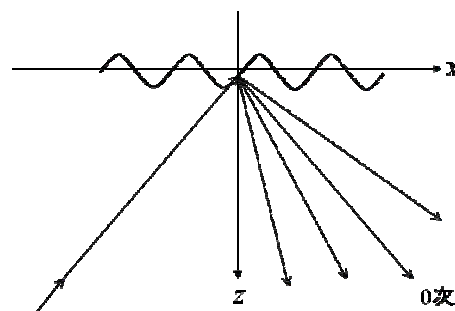


図-1 1次元的正弦波状の面形状

$$z = a \sin(\pi f_1 x + \delta) \quad (1)$$

なる関数と表せて、x-z 平面上に入射光  $P_i$  が存在するので、総べての回折次数項は x-z 平面内に存在することになる。 $P_0$  光は整反射光である。ここで、f を正弦波の周波数（つまり回折格子の場合は格子間隔  $p$  の逆数になる。）、そして、入射角を  $\theta_i$ 、回折角を  $\theta_n$  とすれば、ここでは詳細は省くが、n を整数として、

$$\sin \theta_n - \sin \theta_i = n f \lambda \quad (2)$$

の次数、角度に対して強度を示す。

n 次方向へのエネルギー  $P_n$  を求めるのに際しては回折理論が適用されるが、スカラー理論からベクトル理論まで精度、回折格子の複雑性に合わせた種々の解法が存在する。

因みに有力なベクトル理論では Rayleigh-Rice の vector perturbation theory があるがここでは詳細を割愛して、完全導体表面上で反射強度が一定のときの、偏光直交 2 成分における正弦波面上の 1 次回折光式を示すに留める。

$$\text{S 偏光 : } \quad \frac{P_{\pm 1}}{P_i} = \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right)^2 \cos \theta_i \cos \theta_{\pm 1} \quad (3)$$

$$\text{p 偏光 : } \quad \frac{P_{\pm 1}}{P_i} = \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right)^2 \frac{(1 - \sin \theta_i \sin \theta_{\pm 1})^2}{\cos \theta_i \cos \theta_s} \quad (4)$$

ここで、例えば S 偏光における  $\theta_i$ 、回折角を  $\theta_1$  及び  $P_i$ 、 $P_1$  が測定済みであれば、つまり散乱光の測定により (2) 式から、

$$f = \frac{\sin \theta_1 - \sin \theta_i}{\lambda} \quad (5)$$

として、また、(3) 式から、

$$a = \frac{\lambda}{2\pi} \left( \frac{P_{\pm 1}}{P_i \cos \theta_{\pm 1} \cos \theta_i} \right)^{1/2} \quad (6)$$

として、初期位相項 以外の、表面形状についての重要な情報を得ることが出来る。

## 2 . 粗さの表示

ここで、1 次元的な表面の形状を表わす関数を  $\bar{z}(x)$  とすれば、区間 L における、平均値、或は期待値は、

$$\bar{z} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} z(x) dx \quad (7)$$

となる。もし、 $z(x) = \bar{z}(x)$ であれば、この面は完全に滑らかな面として考える事が出来る。そこで、粗さを、形状の平均値からのズレの平均値、分散で表現することを試みると、

$$\sigma_a = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |z(x) - \bar{z}| dx \quad (8)$$

この粗さの定義は、面形状測定から結果が直接えられる。

さらに別の粗さの表わしかたに、rms (root mean square) 粗さ  $\sigma$  がある。この rms 粗さは、述べさせていただく機会があると思うが、散乱光の測定から直接得られると言う大変有益な性質を持っている。 $\sigma$  は以下の様に表わされる。

$$\sigma = \left\{ \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} (z(x) - \bar{z})^2 dx \right\}^{1/2} \quad (9)$$

ここで、参考までに 1 次元的な正弦波形状の表面の rms 粗さを計算してみよう。正弦波の平均値、そして周期性を鑑みれば、振幅を  $a$  として (9) 式は、

$$\sigma = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} a^2 \sin^2(x) dx \right\}^{1/2}$$

ここで、

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx \quad (10)$$

なので、

$$\begin{aligned} \sigma &= \left\{ \frac{1}{\pi} a^2 \left[ -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2} \int \sin^0 x dx \right]_0^{\pi} \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \frac{1}{\pi} a^2 \left[ -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2} x \right]_0^{\pi} \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{1}{\pi} a^2 \left[ \frac{1}{2} x \right]_0^\pi \right\}^{1/2} \\
&= \left\{ \frac{\pi}{2\pi} a^2 \right\}^{1/2} \\
&= \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad \qquad \qquad - (11)
\end{aligned}$$

となる。

さて、ここでこの(11)式ならびに、この結果を導出した過程を考えると、rms粗さにおいては振幅の係数のみ残り図-2 に表わすような二つの粗さの違いを表現できない。

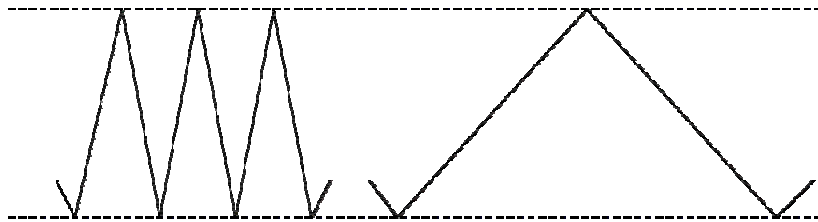


図-2 面傾き導入の必要性

ここで、面傾き (Surface slope) と呼ばれる概念が導入される。傾きの平均  $\bar{z}'$  を、

$$\bar{z}' = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \frac{dz}{dx} dx \qquad \qquad \qquad - (12)$$

として、算術平均的面傾きは、

$$m_a = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \left| \frac{dz}{dx} - \bar{z}' \right| dx \qquad \qquad \qquad - (13)$$

rms 面傾き  $m$  は、

$$m = \left\{ \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{dz}{dx} - \bar{z}' \right)^2 dx \right\}^{1/2} \qquad \qquad \qquad - (14)$$

と表わされる。ここで、やはり 1 次元的正弦波についての rms 面傾きについて考えれば、今度は正弦波の周波数  $f$  についても注目しなければならないから、

$$z(x) = a \sin(2\pi f x) \quad - (15)$$

と置いて (14) 式は、

$$\begin{aligned} m &= \left[ 2f \int_0^{1/2f} \left\{ \left[ a \sin(2\pi f x) \right]' \right\}^2 dx \right]^{1/2} \\ &= \left[ 2f \int_0^{1/2f} \{ 2a\pi f \cos(2\pi f x) \}^2 dx \right]^{1/2} \\ &= \left[ 8f^3 a^2 \pi^2 \int_0^{1/2f} \cos^2(2\pi f x) dx \right]^{1/2} \quad - (16) \end{aligned}$$

さて、ここで (10) 式の場合と同じ様に、

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx \quad - (17)$$

となるので、(16) 式は、

$$\begin{aligned} m &= \left[ 8f^3 a^2 \pi^2 \left[ \frac{1}{2\pi f} \left( \frac{\cos(2\pi f x) \sin(2\pi f x)}{2} + \frac{1}{2} \int \cos^0(2\pi f x) d(2\pi f x) \right) \right]_0^{1/2f} \right]^{1/2} \\ &= \left[ 8f^3 a^2 \pi^2 \left[ \frac{1}{2\pi f} \left( \frac{\cos(2\pi f x) \sin(2\pi f x)}{2} + \pi f x \right) \right]_0^{1/2f} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ 8f^3 a^2 \pi^2 \cdot \frac{1}{4f} \right]^{1/2} \\
&= \sqrt{2\pi f a} \qquad \qquad \qquad \text{-(18)}
\end{aligned}$$

となる。(18)式を a について解き、(11)式に代入すれば、

$$\sigma = \frac{m}{2\pi f} \qquad \qquad \qquad \text{-(19)}$$

よって波長を  $\lambda$  とすれば(19)式から以下の関係が導ける。

$$\lambda = \frac{2\pi\sigma}{m} \qquad \qquad \qquad \text{-(20)}$$

#### 参考文献

- 1) J.C.Stover:Optical Scattering(SPIE Press,Bellingham,1995)
- 2) E.F.Church & P.Z.Takacs:SCATTERING THEORY,HAND BOOK OF OPTICSI (McGraw-Hill,New York,1995)
- 3) 牛山善太:LED 照明ノーツ第 4 回(オプティカルソリューションズ HP)  
[http://www.osc-japan.com/sites/all/themes/osc/images/ODN\\_LED\\_4.pdf](http://www.osc-japan.com/sites/all/themes/osc/images/ODN_LED_4.pdf)