〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-16-2（F ビル 6 階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/
e-mail:info@osc-japan.com

光学設計ノーツ

光学設計ノーツ　1
閉じられた系における光波の振る舞い

株式会社　タイコ
牛山　善太

光学設計に関連した、光学的トピックをこれから、ここに記させていただこうと思う。より単刀直入に言えば、光学設計者である私の興味のある内容、或いは改めて整理をしておきたい内容を系統的にではなく、自由にこの場をお借りして書かせて戴こうと言う心積りである。浅学な著者による、甚だ恣意的なトピックの選択に過ぎるやもしれないが、インターネット上においてのみ容易い形式でもあろうし、これらのノーツのどこかで共感をお持ちいただき、少しでも御付き合い戴ければ幸いである。

さて、第一回目として今回は、光波の伝播において重要な概念・モードを考える上で基本と成る定在波（定常波）から記述を始めさせていただこう。

1.　定在波

波動の一般的な形は進行波（x>0 方向に進む）と後退波（x<0 方向に進む）により以下の様に表せる。

$$\phi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt) \qquad (1)$$

この波が両端（幅 L)、固定された弦の振動の様な物と考え、固定された両端で反射されているとする。まず、一つの端、$x=0$では変位が０であるから、

$$\phi(0,t) = f(-vt) + g(vt) = 0$$
$$g(vt) = -f(-vt)$$

従って、如何なる t に対しても上式は成立せねばならないから、任意の値αに対して

$g(\alpha)=-f(-\alpha)$であって、$\alpha = x+vt$とすれば(1)式は

$$\phi(x,t)= f(x-vt)- f(-x-vt) \qquad （２）$$

とも書ける。(2)式右辺の二つの波は形状が y 軸、x 軸に対して互いに反転した、それ以外は等しい形の波である。

さて、x=0 端においては正弦波を

$$f(-vt)=y=a\cos(-\omega t-\delta)$$

とすれば、(2)式より

$$\phi(0,vt)=a\cos(-\omega t-\delta)-a\cos(-\omega t-\delta)=a\cos(-\omega t-\delta)+a\cos(-\omega t-\delta+\pi)$$

さらに(1)式と比較すると x=0 の固定端では進行波と後退波（x=0 点で反射される入射波と後退波とも考えられる。）の位相はπずれることが分かる。

さて、もう一方の固定端でも同様に

$$\phi(L,t)= f(L-vt)- f(-L-vt)=0 \qquad （３）$$

である。

ここで、$v = \lambda\omega/2\pi = \omega/k$なので複素表示を導入して正弦波による

$$f(x-vt)=\exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right\}=\exp\{i(kx-\omega t)\}$$

となる最大振幅 1 の平面波を波動として考えれば(2)式は、k=2π/λとして、

$$\begin{aligned}\phi(x,t)&=\exp\{i(kx-\omega t)\}-\exp\{i(-kx-\omega t)\}=\exp(-i\omega t)\{\exp(ikx)-\exp(-ikx)\}\\&=\exp(-i\omega t)\cdot 2i\sin(kx)\end{aligned} \qquad （４）$$

となる。この波は、全てのx座標において各周波数ωで振動する波であり、その振幅はxに依存し、$\sin(kx)=0$ の場所では常に時間に依存せず振幅φ＝0 となり、節となる。この波動は(2)式、或いは(4)式で表される、向きは異なるが、切抜きと考えた場合の基本形状は等しい 2 つの進行波と後退波の合成によって表され得るものである。両端が固定されている場合には、（３）式から $\sin(kL)=0$ であらねばならないので、

$kL = m\pi$　　（m：整数）　　（５）

が常に成り立たなければならない。この L の間隔の中に波は常に整数倍の山、あるいは谷を持つことになる。もしこれ以外の波が初期的に存在していたとしても、固定端から反射される（５）を満たす波に吸収されてしまい、安定した節を持つ、(4)式で表される定在波（或いは定常波）となる（図 1)。角周波数は$\omega = kv$、（５）式より$m\pi v/L$ となり、mに依存したとびとびの値を持つ。これらの波動はmの違いによりモードが異なる波と呼ばれる。

この様に閉じられた系においては、波動の互いの干渉により存在できる波動の形が制限され、その具体的な形として各モードの波動が派生する。このモードの概念は、レーザ発振（金属反射面の場合には電場は０となり節となる上記定常波と同じ性質の波が発生する)、光ファイバー、導波路などの部分的、或いは方向的に閉じられた系に於ける光波を考える場合に重要なものとなる。光学設計で一般的に扱う、自由空間伝播系においての光波の挙動を考える場合には存在しない概念である。

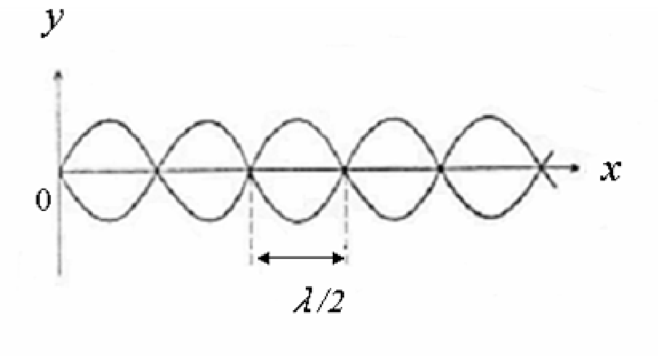

図1　定在波

２．　ある角度をもって交わる２つの平面波の干渉

ここでは、ある角度（x軸と為す角度θ）をもって、振幅（A）も角周波数（ω）も等しい二つの平面波が交わる場合を考えよう（図 2)。すると合成波は、

$$\phi(x,y,t) = A\exp\left\{i\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right\} + A\exp\left\{i\left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right\}$$

$$= A\exp(-i\omega t)\left\{\exp(ikx\cos\theta + iky\sin\theta) + \exp(ikx\cos\theta - iky\sin\theta)\right\}$$

$$= 2A\cos(ky\sin\theta)\cdot \exp i(kx\cos\theta - \omega t) \qquad (6)$$

となる。y方向について(6)式を見ると、明らかに

$$ky\sin\theta=(2m-1)\pi/2 \qquad (7)$$

の時に節をもつ定在波が現われている。x方向には位相速度が 1/cosθ速まっただけの一般形の正弦波が進行する。この正弦波が y 方向には(6)式で表される y 方向には固定された振幅のウエイト関数を伴って伝播すると考えられる。従って、ある時間内で強度平均して考えれば(7)式で決まる位置にλ/(2sinθ)周期の節（強度０の部分）を持つ干渉縞が観察される。

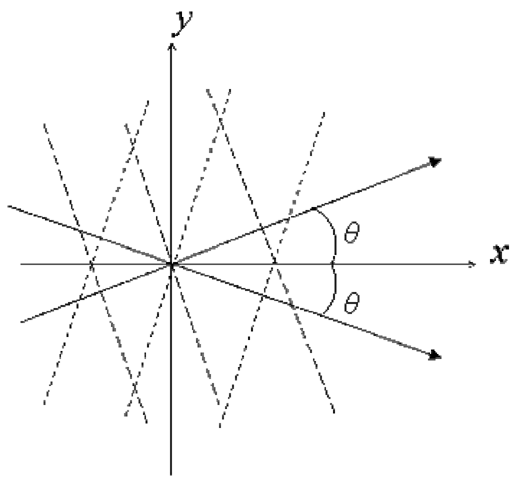

図2　平面波の合成

３．　スラブ導波路における定在波

2 次元的に、x-z 方向には均質な広がりを持つ、3 層のスラブ導波路を考えた場合（図 3）、光波は屈折率の高いコア層内を全反射しながら進む。x方向には系は閉じていないので全反射条件を満たす入射角度範囲の光波は、この方向についてのみ考えれば全て導光されて行く様に見える。しかし、y方向には低屈折率のクラッド層により、全反射する光波のy成分は封じ込められている。従ってビーム径がコア厚に近い大きさであれば、上記２節におけるように、光波のy方向成分について考えると、境界に入射する光波と、そこで反射する光波とで両側のコア境界からそれぞれ微少量 $d\delta$、クラッド側に入り込んだ位置を節とする定常波が発生する。定常波はこれら節を(4)式於ける、x=0,x=L の位置として、(5)式で定まった状態をとらねばならなく、自由に全反射を利用して光波が入射・伝播出来るのではなくコア、クラッドの屈折率、寸法、波長、入射角度などが一定の条件を満たす必要が

出てくる。それらの値により導波路中の電磁界分布のモードも定まる訳である。

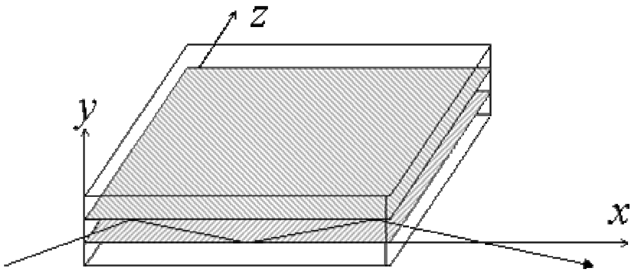

図3　　スラブ導波路

参考文献

1）　大坪順次：光入門（コロナ社、東京、2002）

2）　櫛田孝司：光物理学（共立出版、東京、1985）

3）　国分泰雄：光波光学（共立出版、東京、2003）