提供：Optical Solutions
株式会社オプティカル ソリューションズ
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-16-2（F ビル 6 階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/
e-mail:info@osc-japan.com

光学設計ノーツ

光学設計ノーツ　１１　（ver.1.0）

マリューの定理とフェルマーの原理

株式会社　タイコ
牛山善太

太古から人間は光を光線と言う象徴を用いて、その性質・挙動を理解し整理してきた。この様な研究領域を幾何光学と呼ぶ。そして付随的に幾何光学的波面というものが想定され、これは幾何光学的な光線通過経路計算と、その光線の像面上の到達点における位相差計算・波動光学的な強度分布計算の仲立ちをする非常に重要な概念となる。光線はこの波面に直交する法線を繋いでいったものと考えられ、これらの光線の集散状況を解析する、収差論的にも重要な意味を持つ。今回はその幾何光学的波面の持つ基本的な性質と、そこから導き出される光線の進行経路の法則について触れる。

１．　光路長

L（光路長、或いはアイコナール）で表わされる、光波が媒質中を速度 $\upsilon(\vec{r})$ で進む同じ時間で真空中の光波が進む距離を導入する。ds を光波の進行方向にとった線素とし、光源 P から Q までの積分路（光線の経路）を l とすると、アイコナール L は

$$L(x,y,z)=\int_m \frac{c}{\upsilon(\vec{r})}ds$$

屈折率は真空中と媒質中に於ける光の速度の比であり、$n=c/v$ なる関係になるので、

$$=\int_m n(\vec{r})ds \qquad (1)$$

となる。

正弦波動を表す基本式において、t を進行の時間、λ_0 を真空中の波長、c を真空中の光速とすれば

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}(ct-L) \qquad (2)$$

が位相を表す。したがって、光源 P からの L が一定ならば、関数 $L(x,y,z)=$const. により表

される位置の集合は、多数の光波の等位相位置を表す幾何光学的波面を表す。

(1)式における $\vec{r}$ は位置ベクトルであり $n(\vec{r})$ は場所により屈折率が異なることを想定している。もし、屈折率 n が媒質内で均一であるとすれば、光線は直進し（1）式より

$$L = l \times n \qquad (3)$$

となり、P から Q の距離に、屈折率 n を乗じて光路長を得ることができる。

２．　マリューの定理

一様な媒質中の１点から出た光線、或は１点に収束しようとする光線は、同心的な等位相の球面状の波面を形成しつつ進行して行くと考えられる。この様な光線群を同心光線束（或いは１つの点光源から射出した光線群を同族光束）と呼ぶ。別の見方をすれば、波面の伝播を考えるとき、各瞬間の波面に、同心的な球面波の場合には明らかに、常に直交する無数の光線群が伝播方向に進行しているとも考えられる。

もし、光波が屈折率の不均一な媒質を透過したり、屈折率が不連続に変化する二つの媒質の境界面において反射・屈折したりするとすれば、もはや光線群は必ずしも同心的では無くなってしまうだろう。しかし、この様な場合においても、“等位相面は存在し“共通の波面を形成していた、同心光線束に属するすべての光線に直交する曲面（波面）が存在する。”これがマリュー（Malus）の定理である。

１）旧波面から新波面に至る光路長が総ての光線の経路に対して等しい。
２）総ての想定しうる光線が新波面に直交している。

屈折・反射後の新しい波面がこの同族光線束に対して成立するためには、この二つの条件を同時に満たさなければならない。

ここで、２つの均一な屈折率 n_1、n_2 をもつ媒質１，２が曲面 T で互いに接して存在しているとする。（図 1）媒質１において L(x,y,z)＝S_1 なる波面を考え、S_1 上の A 点から出発する光線を考える。

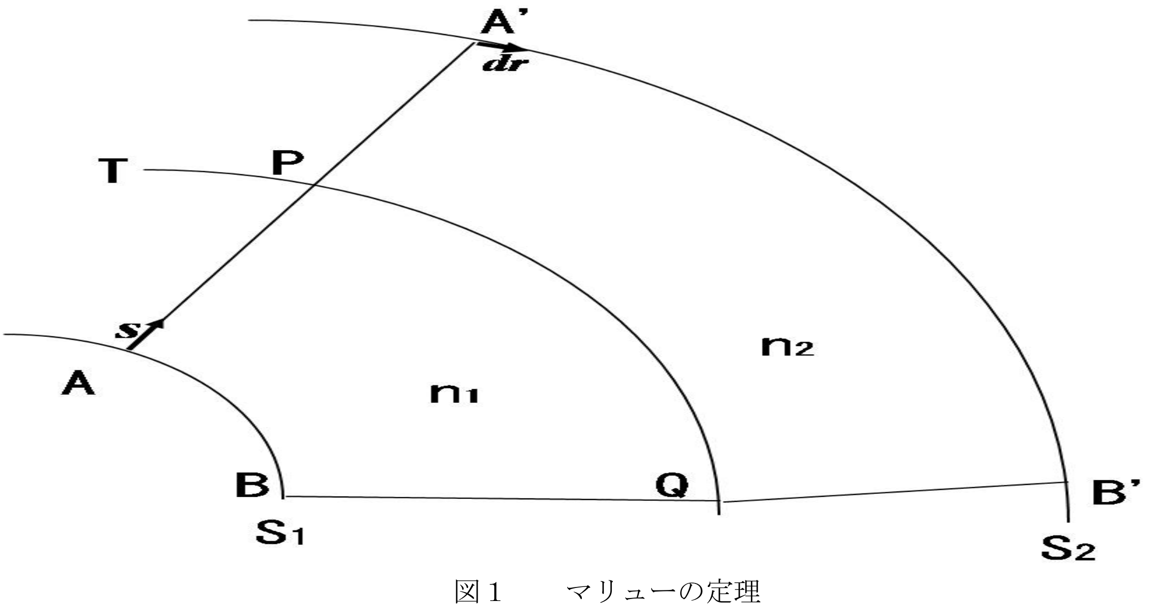


図１　　マリューの定理

この光線は、当然、S_1に直交している。そして、この光線のＴとの交点をＰ、媒質２における到達点を A'としよう。　ここで、Ａ点を波面S_1上で、S_1との垂直を保ちつつ移動させる。この時、Ａから出発した光線ＡＰＡ'も、その光路長を変えないでＡと一緒に移動すると考える。そして最終的に BQB'の位置に到達したとする。A'が B'に移動するあいだの軌跡が曲面S_2を描くとする。ここで光線 QB'が曲面S_2の至るところでS_2に直交していることが示されれば、上記、１）、２）の条件が満たされることになる。

さて、ここで閉じた経路 APA'B'QBA にストークスの定理を適用し“ラグランジュ(Lagrange)の積分不変量”を考える。

$$\oint_C n\bar{s}\cdot d\bar{r}=0 \qquad (4)$$

$\bar{s}$は光線の進行方向への単位ベクトルであり、$d\bar{r}$は積分経路Ｃに沿ったベクトル線素として、（４）式は閉曲線Ｃが二つの媒質の境界面にまたがっている場合にも成立するので、上記経路 APA'B'QBA に適用してみよう。すると、区間 APA'、B'QB では$\bar{s}$と$d\bar{r}$の方向が等しいので、dsを微小線素長として

$$\int_{APA'} nds+\int_{A'B'} n\bar{s}\cdot d\bar{r}+\int_{B'QB} nds+\int_{BA} n\bar{s}\cdot d\bar{r}=0 \qquad (5)$$

ここで光路長を[ ]であらわすと

[APA']=[BQB']

となり、また、S_1の AB 上では、光線は波面の法線であるから$\bar{s}$と$d\bar{r}$は直交している。従って（５）式においては第２項を残し他の項は総て０になってしまう。よって（５）式は

$$\int_{A'B'} n\bar{s}\cdot d\bar{r}=0 \qquad (6)$$

となり、常に$\bar{s}\cdot d\bar{r}=0$なる関係が曲面S_2上で成り立つことになる。すなわち、あらゆるS_1における同心光線束内の光線は曲面S_2に直交する。

マリューの定理は１点から射出した光線が、収差を持つレンズなどの光学系を透過したその後も、波面を形成しつづけ、その波面形状は、光源からの光線追跡により、多数の同族光線の光路長を計算することにより理解できることを表している。また、光線という概念から出発した光学においては、波面に光線が常に直交することは、話の順序としてはこのマリューの定理により始めて正当化される。

３．　フェルマーの原理

光線の進行経路を考える上で非常に重要な意味を持つ、フェルマー（Fermat)の原理は、次の様に表現される。点Ｐを通過した光線が点 Q に、に達する時、Ｐから出た別の近傍光線と、

互いの光線経路が交わる点がQでは無い場合に、(P,Qが、それらを結ぶ光線が多数存在する共役関係にある場合以外でも、同族光束中、収差を持った周辺光線と主光線の交点までのそれぞれの光路長は異なるので、こうした場合も除外される。(図２))

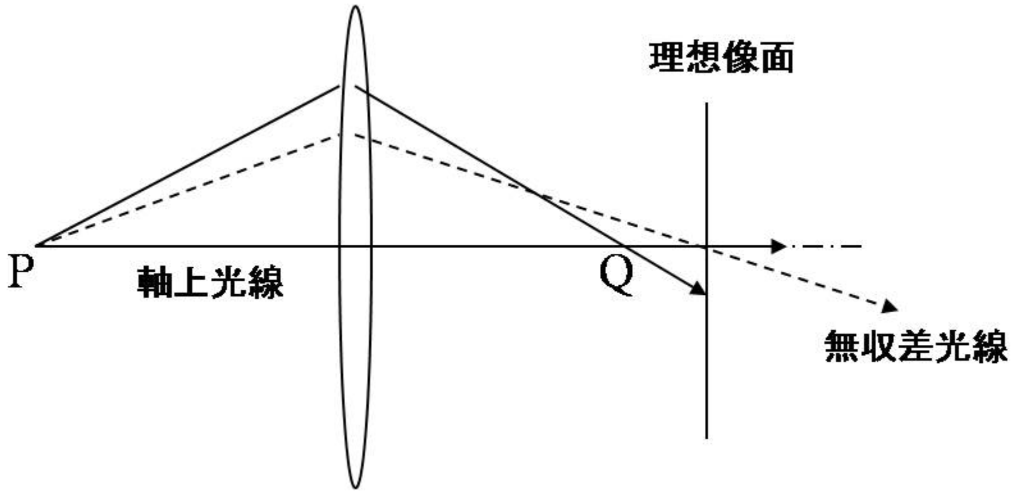


図２　光路長の異なる２点間の光線経路

“点Ｐから点Qに到達する光は、その光路長が停留値をとるような光路を経る。”

この広義のフェルマーの原理における停留値とは、極値として、極小値、極大値、また、微分係数が０であるが極値ではない鞍値を意味する。停留値をとると言うことは、実際の光路が、近隣の、そこから微小量εの１次のオーダーのズレを持った経路との光路長差 $W(\varepsilon)$が、微小量εの２次以上のオーダーの量と成る事を意味する(図３)。この様な場合、実際の光路長の変分は０であるとも言う。

さて、光路長差 $W(\varepsilon)$は(2)式より

$$W(\varepsilon)=\int_P^Q nds'-\int_P^Q nds \qquad (7)$$

と表現できる。ここで、ds,ds'はそれぞれの経路に沿った微小長さである。さらに、この値がεの２次以上の微小量であることを

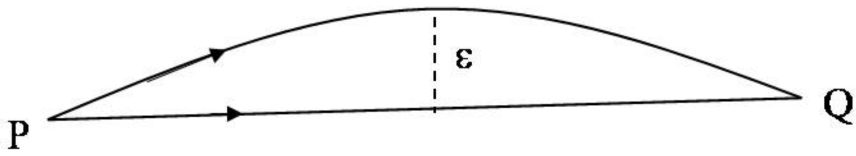
$$W(\varepsilon)=O(\varepsilon^2) \qquad (8)$$

と表せば、(8)式の辺々をεで微分し、εを限りなく０近づけると

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial W(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}=0 \qquad (9)$$

となる。つまり、実際の経路においてはεの変化に対する光路差の感度は０、曲線 W へのε=0における接線の傾きは０になり、W は極値、一定値或いは鞍値をとる(図４)。

図３　進行経路の微小な変化



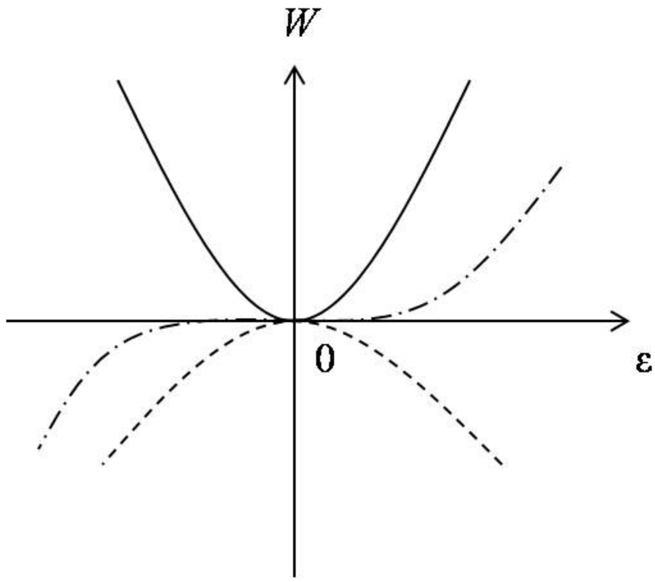


図４　　停留点

多くの場合、狭義のフェルマーの原理としては光路長は最小値をとると考えても差し支えない。(正確には任意の点 P,Q を結ぶ光路が唯一つ存在する様な光線の拡散・収束状況において、つまり光線が交叉していない場合において最小値をとる。)　ここで図５にある様にＰからＡ点を経て Q に達する経路を実際の光路と考えよう。このＰと Q の間には光線 P,A,Q の属する同心光線束の形成する幾何光学的波面が無数に存在する。この中で隣接する２つの波面 S_m 、S_{m+1} の間では屈折率が一定であると考えることができる。

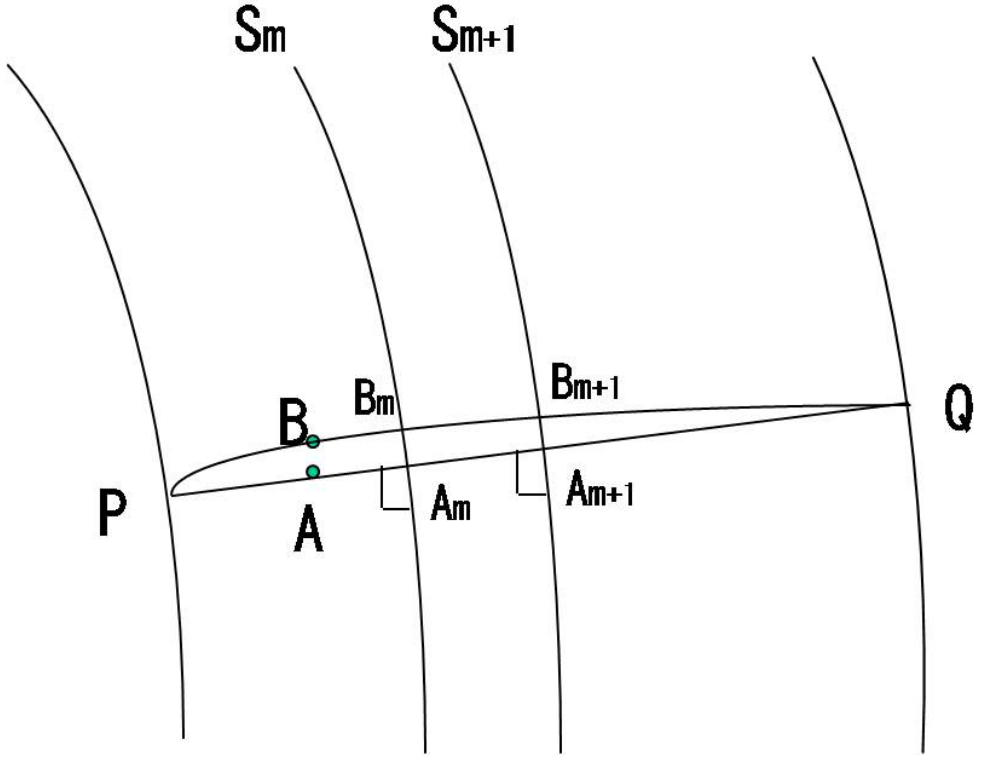


図５　フェルマーの原理

又、これらの波面に挟まれる光線 P,A,Q 上の線分、$\overline{A_m A_{m+1}}$ は、どの様な媒質を光線がそれまでに通過してこようとも、マリューの定理により、必ず２つの波面に直交しているはずである。そこで、光線 P,A,Q の近傍に任意の経路 P,B,Q を想定したとすれば、この経路は、実在する光路となる場合には、上記の除外措置の対象となるので、ここでの検討範囲内では存在しない光路であるはずである。よって、この経路上の S_m、S_{m+1} を通過する同様な線分、$\overline{B_m B_{m+1}}$ はこれらの波面にどの区間でも直交しているとは限らない。もし全ての光路区間で直交していれば、その時は互いの光路長は等しく PQ は共役関係にあることになり条件から外れる。

$$nA_mA_{m+1} \leqq nB_mB_{m+1}$$

また、上記以外の微小な波面間隔においても同様の関係が成り立つ。従って、それぞれの曲線に沿った P から Q までの光路長の間には、

$$\int_{PAQ} nds < \int_{PBQ} nds \qquad (10)$$

なる関係が成り立ち、波面に全区間で直交する実際の経路に沿った光路長が最小値をとることが理解できる。（A,B 間距離が微小では無く、その間に波面が大きく屈曲している様な場合には上記検討は成立しない。）そして、屈折率が一様な媒質中では光線は２点を結ぶ最短距離を持つ経路、すなわち直線経路を進むことが、フェルマーの原理からも明らかになる。

４．　参考文献

１．　M.Born & E.Wolf：光学の原理Ⅰ、第７版／草川徹訳

（東海大学出版会,2005）

２．V.N.Mahajan:Optical Imaging And Aberrations part I

（SPIE Press,Bellingham,1998）

３．牛山善太、草川徹：シミュレーション光学（東海大学出版会、東京、2003）