提供：Optical Solutions
株式会社オプティカルソリューションズ
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-16-2（F ビル 6 階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/
e-mail:info@osc-japan.com

光学設計ノーツ

光学設計ノーツ　１２　（ver.1.0）

フェルマーの原理からアイコナール方程式、光線方程式へ

株式会社　タイコ
牛山善太

前回、光学設計ノーツ 11 において光線を中心としたマリューの定理とフェルマーの原理について触れた。Maxwell の電磁方程式以前の光学の重要な出発点である。今回はその続きとして、フェルマーの原理からアイコナール方程式の、そして媒質中で光線が進むべき経路を具体的に定める光線方程式の導出を行なう。

１．フェルマーの原理から導くアイコナール方程式

一つの光線上に点 A(x,y,z)、B(x',y',z')を決める。これらの点は互いに共役点ではないとする。フェルマーの原理から光路長[AB]（$=L$）は点 A,B の座標の関数として一義的に決まる。ここで、B 点は固定したままで、A 点が微少量 ds 移動した A'点と、固定されたB点とにより決められる光線を考えよう。この時、光路長[A'B]を $L+dL$ とすれば、系は図１の様に波面と共に表せる。

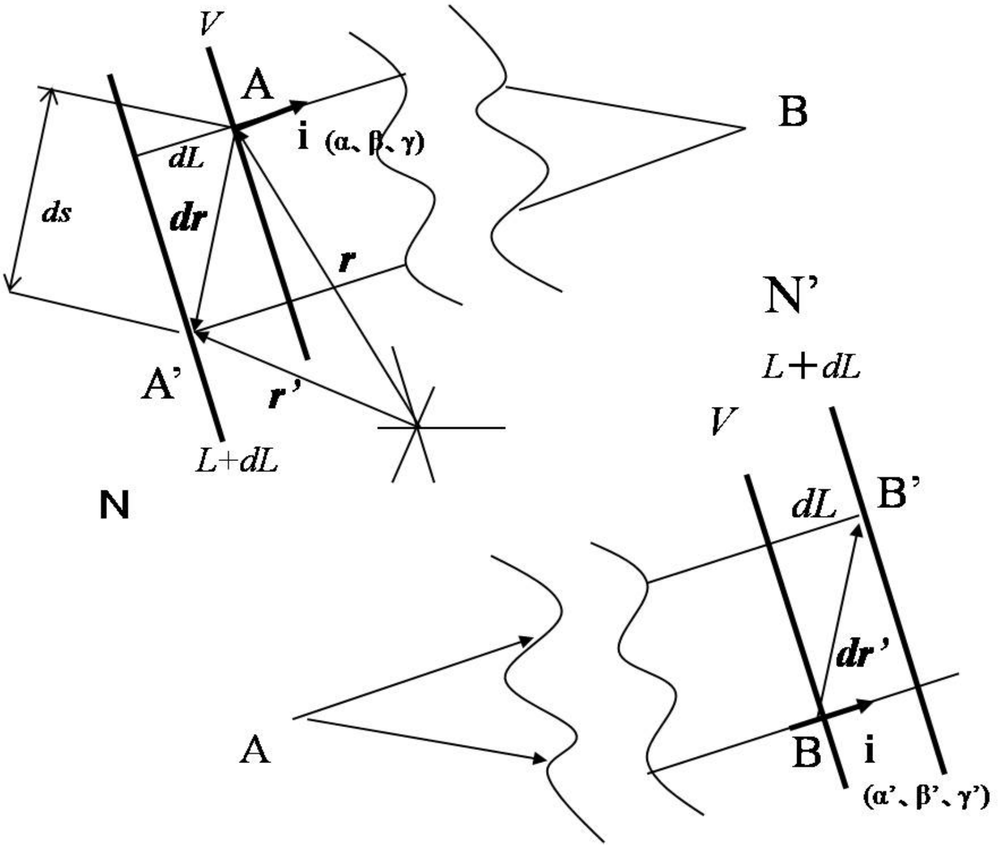


図１　　フェルマーの原理からアイコナール方程式を求める

Ａを通過する光線の方向余弦成分をα、β、γとすれば、物界の屈折率をｎ、光線の方向を表す単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$ として、微小な変化 $d\vec{r}$ ：(dx,dy,dz)の場合には波面を平面と考えられて、ベクトルの方向に注意して内積を用い、

$$dL \approx -n\overrightarrow{dr} \cdot \vec{i} = -n(\alpha dx + \beta dy + \delta dz) \qquad (1)$$

とすることが出来る。同様に、像界に屈折率 n'、元々の光線方向余弦成分α'、β'、γ'を考え、今度はＡ点を固定し、Ｂ点が $d\vec{r}\,'$ ：(dx',dy',dz)移動したとすれば、

$$dL \approx n'\overrightarrow{dr'} \cdot \vec{i}\,' = n'(\alpha' dx' + \beta' dy' + \delta' dz') \qquad (2)$$

とできる。よって、点 A→A'と移動し、その後、点Ｂ→B'とさらに移動した場合には(1)(2)式より

$$dL = -n(\alpha dx + \beta dy + \delta dz) + n'(\alpha' dx' + \beta' dy' + \delta' dz') \qquad (3)$$

となる。

ここで（３）式を微分すれば

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -n\alpha \quad , \frac{\partial L}{\partial y} = -n\beta \quad , \frac{\partial L}{\partial z} = -n\gamma$$

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = n'\alpha' \quad , \frac{\partial L}{\partial y'} = n'\beta' \quad , \frac{\partial L}{\partial z'} = n'\gamma' \qquad (4)$$

これらの式の右辺は方向余弦に屈折率の係ったものであるから

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2 = n^2 \qquad (5-1)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z'}\right)^2 = n'^2 \qquad (5-2)$$

（5-1）式は別の表現では

$$|\mathrm{grad}\, L|^2 = n^2 \qquad (6)$$

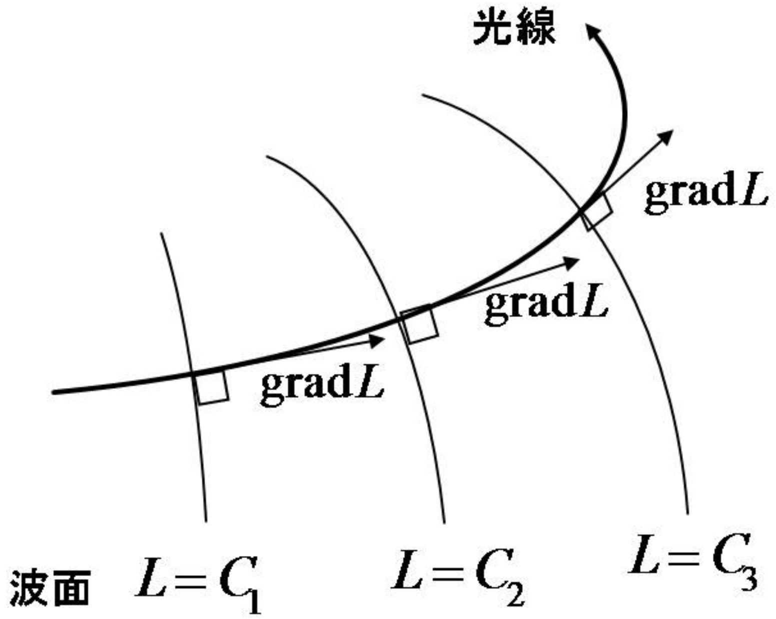
である。

これは、Maxwell の電磁方程式より導かれる、アイコナール方程式であり、斯様にフェルマーの原理からも導出できる。L を Hamilton の特性関数とも呼ぶ。

２．　光線の成り立ち

$\mathrm{grad}\, L$ とは $L(x, y, z) = c$ （定数）なる曲面上の点 (x, y, z) においての接平面に直交するベクトル、つまり法線ベクトルを表している。すると $\mathrm{grad}\, L$ はその表面上で L が一定な幾何光学的波面に、直交するベクトルと看做せる。この、多数の波面の法線を極微小な単位で繋げていったもの、波面法線の描く軌跡を我々は“光線”と考えて来た（図 2)。

図２　光線と波面



今までのところ、屈折率 n を一定には扱っていないので、座標 (x, y, z) により $n(x, y, z)$ が変化し波面が同心円的に広がらず、光線が必ずしも直線とならず、曲線を描く可能性も考えられる。

さてここで、A 点、或いは B 点の変位が光線経路上において起きると考え直す（図 3)。

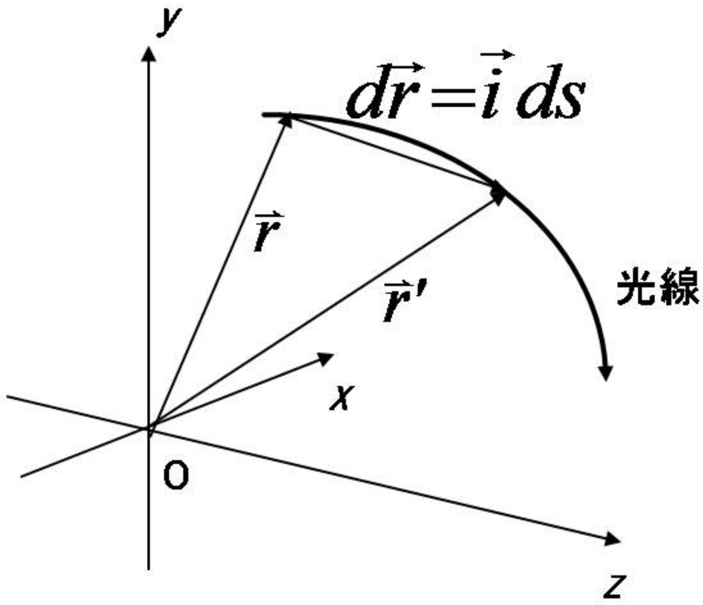


図３　　　光線上の変化

その場合も上記(4),(5)式は成立するはずである。そして、それらの点の座標(x,y,z)を示す位置ベクトル $\vec{r}$ を導入し、その位置ベクトルの変化を $d\vec{r}$ とすれば、

$$d\vec{r} = \vec{i}\,ds \qquad (7)$$

よって

$$\vec{i} = \frac{d\vec{r}}{ds} \qquad (8)$$

となる。

　ここで、簡便のため像界における(4)式の総てのダッシュ（'）を省いて表記するとして（n'→n の如く）、方向余弦成分は

$$\alpha = \frac{dx}{ds} \quad , \quad \beta = \frac{dy}{ds} \quad , \quad \gamma = \frac{dz}{ds} \qquad (9)$$

であるので、(4)式より、

$$n\frac{dx}{ds}=\frac{\partial L}{\partial x} \qquad （１０－１）$$

$$n\frac{dy}{ds}=\frac{\partial L}{\partial y} \qquad （１０－２）$$

$$n\frac{dz}{ds}=\frac{\partial L}{\partial z} \qquad （１０－３）$$

(9)から(10)式を２乗して辺々加えていけば

$$n^2\left(\frac{|d\vec{r}|}{ds}\right)^2=|\mathrm{grad}\,L|^2$$

$$n\frac{d\vec{r}}{ds}=\mathrm{grad}\,L \qquad （１１）$$

また、*x,y,z* は *s* の関数であるので、（10-1）式を辺々 s で微分すると

$$\frac{d}{ds}n\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)+\frac{dy}{ds}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)+\frac{dz}{ds}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) \qquad （１２）$$

（12）式に（10）の－１から－３式を代入して

$$\frac{d}{ds}n\frac{dx}{ds}=\frac{1}{n}\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)+\frac{1}{n}\frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)+\frac{1}{n}\frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2n}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2\right\} \tag{13}$$

よって（5）式、アイコナール方程式より

$$\frac{d}{ds}n\frac{dx}{ds}=\frac{1}{2n}\frac{\partial}{\partial x}n^2 \tag{14}$$

同様に計算し、$\vec{h},\vec{j},\vec{k}$ の各成分単位ベクトルを考え各成分を合成すると、

$$\left(\frac{d}{ds}n\frac{dx}{ds}\right)\vec{h}+\left(\frac{d}{ds}n\frac{dy}{ds}\right)\vec{j}+\left(\frac{d}{ds}n\frac{dz}{ds}\right)\vec{k}=\frac{1}{2n}\left(\frac{\partial n^2}{\partial x}\vec{h}+\frac{\partial n^2}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial n^2}{\partial z}\vec{k}\right) \tag{15}$$

右辺に $\mathrm{grad}f(\varphi)=f'(\varphi)\mathrm{grad}\varphi$ の関係を適用して

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right)=\mathrm{grad}n \tag{16}$$

この式の右辺は座標 (x,y,z) による屈折率 $n(x,y,z)$ の変化量を表し、左辺は(11)式より明らかな様に光線の経路が屈曲する量を表している。つまり屈折率の空間分布がわかれば光線の方向を計算することができる。（16）式を光線方程式と呼ぶ。

ここで一般のレンズに用いられている硝材の如き屈折率が一定の媒質を考えれば、当然、媒質中の屈折率の変化が無いので $\mathrm{grad}\,n=0$ となり、左辺の微分を実行すれば

$$\frac{dn}{ds}\frac{d\vec{r}}{ds}+n\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)=0 \tag{17}$$

(８)式両辺をさらに s で微分すると

$$\frac{d\vec{i}}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)$$

従って(１７)式は

$$\frac{dn}{ds}\frac{d\vec{r}}{ds}+n\frac{d\vec{i}}{ds}=0$$

場所による屈折率の変化が無いので

$$\frac{d\vec{i}}{ds}=0$$

であるから、光線の進行方向を表すベクトル$\vec{i}$は一定となる。すなわち屈折率が一定の媒質内では光線は直進する。

４．　参考文献

1． M.Born & E.Wolf： 光学の原理Ｉ、第７版／草川徹訳（東海大学出版会,2005）
2． 飯塚啓吾：光工学（共立出版、東京、１９８３）
3． 松居吉哉：収差論、（日本オプトメカトロニクス協会、1995、東京）
4． 三好旦六：光・電磁波論（培風館、東京、１９９５）
5． 牛山善太、草川徹：シミュレーション光学（東海大学出版会、東京、2003）