

光学設計ノーツ

光学設計ノーツ 16 (ver.1.0)

波動光学的波面と幾何光学的波面

(フレネル積分を用いた幾何光学的波面適用限界の考察)

株式会社タイコ 牛山善太

今回は、これまで考えてきた幾何光学的波面と、波動光学的(物理的)波面の違いについて確認してみたい。文字通り、物理的には波面と言えば後者を指すのであろうが、光学技術分野においてはむしろ、前者を示している場合も多く、少々複雑でもある。

1. その定義の違い

基本的には以下の定義が一般的である¹⁾。

波動光学的波面: 複素振幅等位相な座標が形成する面

幾何光学的波面: 光線に沿った等アイコナル点が形成する面

(幾何光学的波面は従って、光線経路に沿った等位相面でもある。)

これらの波面が場合によって異なるのは明らかである。幾何光学的波面はあくまでも光線に沿ったアイコナルによるものであるため、回折の影響はそこには含まれ無い。本稿 3 節において扱うが、光軸に平行に進む平面波が有限の大きさの開口を通過しても、幾何光学的波面はもとの無限に広がる平面波の一部が開口により切り取られたが如く、その平面性、面積を維持したままどこまでも進行していく。実際には回折現象により光波はある程度の広がりを持ってしまう訳であるから、こうした物理的、波動光学的な波面と、幾何光学的波面の形状は乖離する。

2. 計算手法

これら波面の計算手法について、ここで考えさせて戴きたいのであるが、幾何光学的波面については本連載においても詳しく触れている。細かい事を省いて表現すれば、スネルの法則に基づく光線追跡をして、一点から射出した多数の光線の光路長が一定となる面を求めればよい訳である。ここではさらに詳しくは述べない。

波動光学的波面もホイヘンス-フレネルの回折積分により、任意の位置における複素振幅が計算できるので、その理屈により等位相面が得られるという楽観的な表現も可能かと思うが、波面形状を求める場合だけでなく、ある場所における複素振幅が、そこに影響を与える複素振幅場(ホイヘンス的考えであ

れば2次波源場)の影響の合成として、元の複素振幅場と同様の形で、最大振幅、位相を持つ複素振幅関数として表現される事は、当たり前のようにも思いますが、重要な事柄なのでここで、検討させていただきます。

ある仮想面上(1次波面上としても良い)のある位置における複素振幅が分かっているならば、それら微小面積光源からのウェーブレットの影響の合算としてP点における複素振幅 U_p は得られる。無数のウェーブレットの独立した量を添え字で識別するとして、

$$U_p = \frac{A_1}{r_1} \exp(i\phi_1) + \frac{A_2}{r_2} \exp(i\phi_2) + \frac{A_3}{r_3} \exp(i\phi_3) + \dots \quad (1)$$

と表される事になる。 A, r, ϕ は2次光源における最大振幅、Pまでの距離、Pにおける位相である。光波の線形の重ね合わせとして(1)式は

$$U_p = \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{r_i} \cos(\phi_i) + i \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{r_i} \sin(\phi_i) \quad (2)$$

とも表せるので、ホイヘンス-フレネルの回折理論により積分を行なっていけば確かに

$$U_p = \text{Re.} + i \text{Im.}$$

となり、

$$U_p = A_p \exp(i\phi_p) \quad (3)$$

の様な形でPにおける複素振幅関数を得ることが出来る。

3. 平面波の伝播

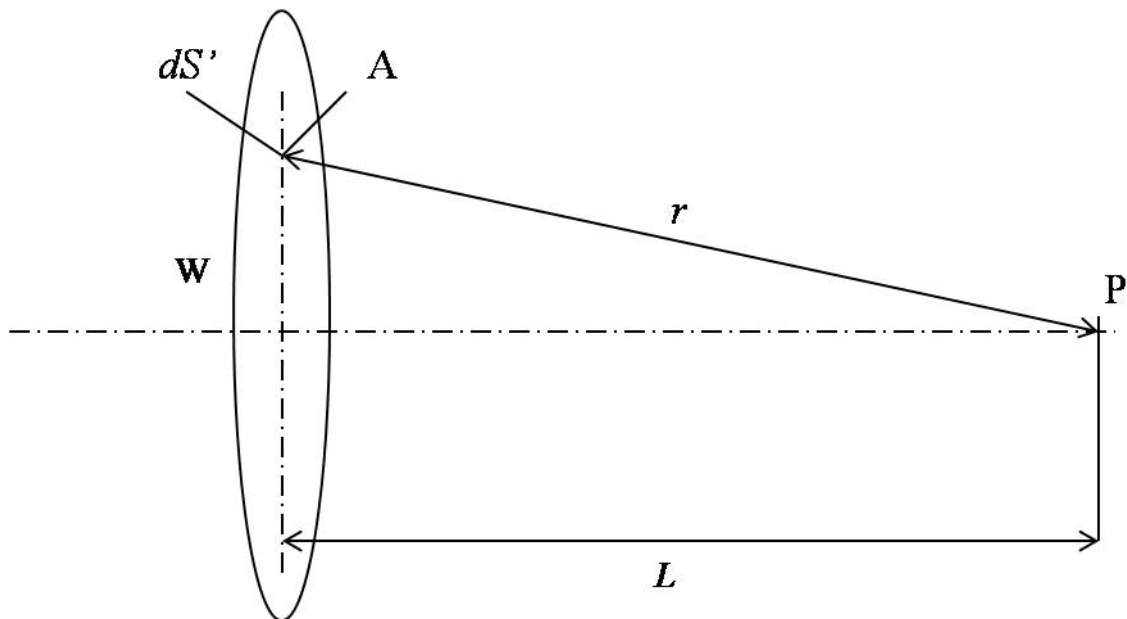


図1 平面波の進行

図 1 にある様に、ある時刻の平面波を W として、その波面上の点を A 、 A 近傍の微小面積を dS' 、波面上の振幅を u_A とすれば、 r を A から観測点 P までの距離とすれば、 A からは以下の如くの 2 次球面波が発生する。 $k=2\pi/\lambda$ 波数である。

$$qdS' \frac{\exp(-ikr)}{r} u_A \quad - (4)$$

q はここでは比例定数として置いておく。よって、ホイヘンス-フレネルの原理から、 P における振幅は平面 W 上の面積を $dS'=dxdy$ として

$$u(P) = q \int \int_{-\infty}^{\infty} u_A \frac{\exp(-ikr)}{r} dxdy \quad - (5)$$

となる。ここで、 P と平面 W の距離を L とすれば、積分変数である A 点の位置座標 (x, y) と比べて十分に L が大きいと考えれば、

$$r = \sqrt{L^2 + x^2 + y^2} \approx L + \frac{1}{2L}(x^2 + y^2) \quad - (6)$$

とすることが出来る。これは(5)式の波動の積分に於いては、任意の変数座標 (x,y) の近隣の領域のみにおける波動の合成・干渉が、そしてそれらの積み重ねが積分結果に大きな意味を持つと仮定して、その時、近隣の領域の r の差は微小な量であることによる。 \exp 項の分母においては $x,y \ll L$ として(6)式から $r \approx L$ 、また(6)式を \exp の位相項内 (この位相項の分母には微小量 λ が含まれる) の r に代入して (5) 式は、

$$u(P) = \frac{q}{L} \exp(-ikL) \int \int_{-\infty}^{\infty} u_A \exp\left\{-\frac{ik}{2L}(x^2 + y^2)\right\} dxdy \quad - (7)$$

となる。ここで、

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{\pi L}} x \quad (8) \quad \text{とおけば、}$$

$$x = \sqrt{\frac{\pi L}{k}} \alpha$$

$$dx = \sqrt{\frac{\pi L}{k}} d\alpha$$

であるから (7) 式右辺中の積分を考えれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-ikx^2}{2L}\right) dx = \sqrt{\frac{\pi L}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-i\pi\alpha^2}{2}\right) d\alpha \quad (9)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi L}{k}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \cos\frac{\pi\alpha^2}{2} d\alpha - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin\frac{\pi\alpha^2}{2} d\alpha \right\} \quad (10)$$

とフレネル積分の形に成り、すると、積分の公式から、積分領域が±無限の場合には、被積分関数の双方は遇関数であるので、

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{\pi L}{k}} (1-i) \\ &= \sqrt{\frac{\lambda L}{2}} \sqrt{2} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{\lambda L} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。 u_A を積分領域では一定であると考えれば、2次元の場合には(9)式の単純な積の形で次元を拡張すれば良いので、(7)式は以下のフレネル積分を含む形に書き換えられる。

$$u(P) = u_A \frac{\lambda q}{2} \exp(-ikL) u_A \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \cos\frac{\pi\alpha^2}{2} d\alpha - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin\frac{\pi\alpha^2}{2} d\alpha \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \cos\frac{\pi\beta^2}{2} d\beta - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin\frac{\pi\beta^2}{2} d\beta \right\} \quad (12)$$

(11)式の結果を考慮すれば

$$\begin{aligned} u(P) &= \frac{q}{L} \exp(-ikL) u_A L \lambda \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) \\ &= q \exp(-ikL) u_A \lambda (-i) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。 q は定数係数であり、この式は明らかに平面波を表わしている。つまり、一次平面波上の2次光源による、2次球面波の合成により、再度、進行した平面波が生成されることになる。

さらに、係数 q を求めるために、これとは別に、点 O を含む単位面積の、 P に対する影響を考えれば平面波の直接的な進行を考えて、

$$u(P) = \exp(-ikL)u_A \quad - (14)$$

となるはずである。さらに (13) 式との比較により

$$q = \frac{i}{\lambda} \quad - (15)$$

であることが分かる。よって、(4) 式の特定の点 A からの2次球面波は

$$\frac{i}{r\lambda} u_A \exp(-ikr) dS \quad - (16)$$

と表せる。

(7) 式の積分は無限の領域で行なわれているが、それは無限の大きさの平面波について考えている事になるのであるが、もしこの光学系に開口絞りを設け積分領域を制限すれば、当然(10)式 of フレネル積分結果が異なり、前項でも触れた様にここまで導出してきた明快な平面波の解が得られなくなる。

ここで、積分領域を α_1 から α_2 として、

$$C(\alpha_1) = \int_0^{\alpha_1} \cos\left(\frac{\pi\alpha^2}{2}\right) d\alpha, \quad S(\alpha_1) = \int_0^{\alpha_1} \sin\left(\frac{\pi\alpha^2}{2}\right) d\alpha \quad - (17)$$

の如くにおく。(17) 式で定義される積分を既出ではあるが、フレネル積分と呼び、関数表により値を得ることが出来る。フレネル積分値は $\alpha=0$ の時 $C=S=0$ となり、 $\alpha=\pm\infty$ では $C=S=\pm 1/2$ となる。 $C(\alpha)$ 、 $S(\alpha)$ 、 α を直交する3軸にとり表現したものを $C(\alpha)$ - $S(\alpha)$ 平面に射影したものが図2である。この図2における渦巻きをコルニュー (Cornu) のスパイラル (spiral)^{4)P156} と呼ぶ。

さて、積分定数を K とし、 $\alpha_2=0$ とすれば(12)式から

$$\begin{aligned} I = |u(P)|^2 &= K^2 \left[\{C(\alpha_1) - C(\alpha_2)\}^2 + \{S(\alpha_1) - S(\alpha_2)\}^2 \right] \left[\{C(\beta_1) - C(\beta_2)\}^2 + \{S(\beta_1) - S(\beta_2)\}^2 \right] \\ &= K^2 \{C(\alpha_1)^2 + S(\alpha_1)^2\} \{C(\beta_1)^2 + S(\beta_1)^2\} \end{aligned} \quad (18)$$

つまり強度は $C(\alpha)$ - $S(\alpha)$ 平面原点から α_1 (或いは α_2) により決まる点 (C, S) の線分の、同平面上への射影長に比例することが分かる。上述の通り、 $\alpha_1 = \infty$ のときは積分値は $1/2$ に収束する。これが(11)式を導いたときの場合である (実際には $-\infty$ から 0 、 0 から ∞ と積分を分離して行なっているが)。 α_1 (絞りの大きさに依存) が有限の値となると、一端が原点上に固定されたこの線分の、もう一方の端はコルニュー螺旋状を動いていく事になり、その長さに比例して強度が変わる。

開口径が有限になるということは、 P 点の位置によって積分範囲が相対的に異なる事を意味している。開口が閉じるに連れて (x が小さくなるに連れて)、線分端はくるくると $(1/2, 1/2)$ を中心にしてその付近に螺旋状の軌道を描くが、図 2 上の A 点を過ぎるあたりから線分長 (つまり P における強度) は急激に変化する事になる。平面波の場合とは大きく異なる強度を示す。光線の直交面であり、一次波面上の均一振幅分布を基にした幾何光学的波面は精度的に成立しにくくなり、本来の等位相面を表わす波動光学的波面とは異なる形状となって行く。

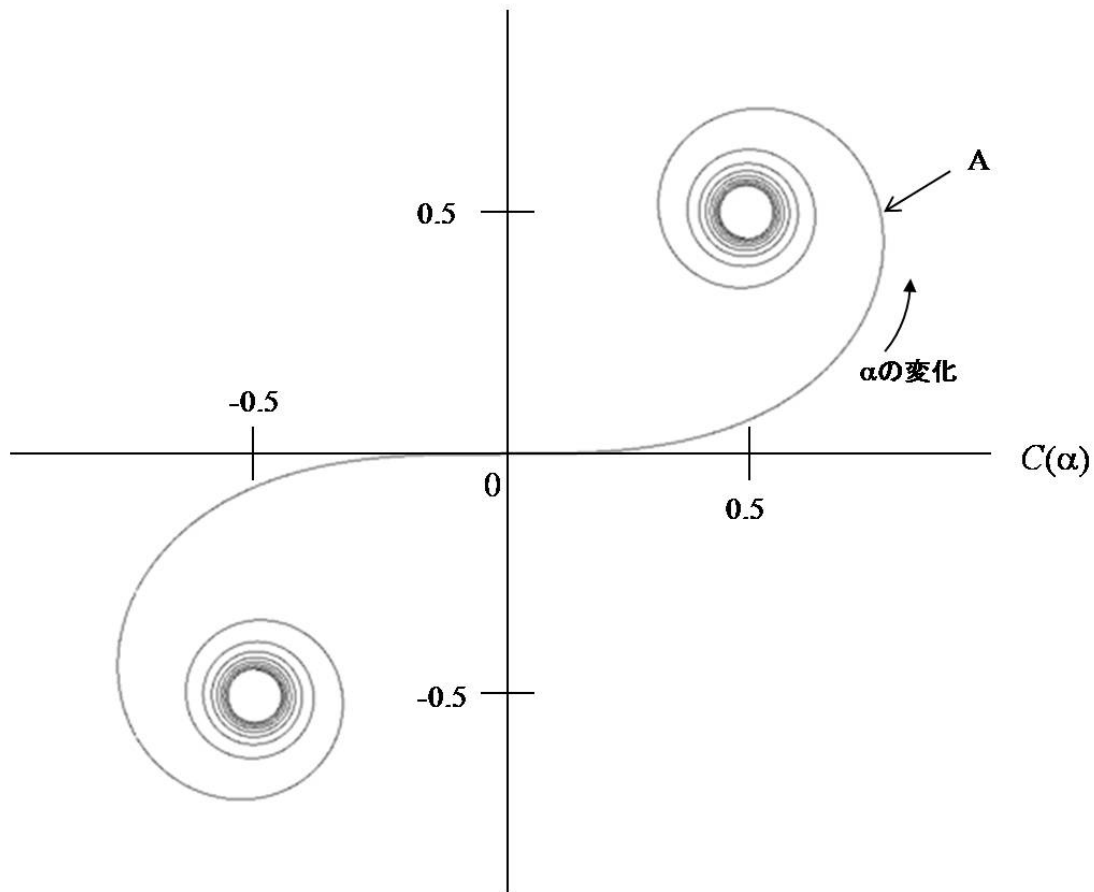


図 2 Cornu の spiral

この様に考えると、上記積分範囲を表す α が、幾何光学波面との乖離の程度を示す重要なファクターとなるが、この場合は(8)式

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{\pi L}} x$$

としているので、

$$\alpha^2 = \frac{2}{\lambda L} x^2$$

である。さらに $x \times x$ の領域を考えると、実際には対角の $\sqrt{2}x \times 2$ の幅に含まれるフレネルゾーン数をフレネル数とすれば、 $\sqrt{2}x$ を絞り半径と看做した時のフレネル数 ^{4)P103} F_N は

$$F_N = \frac{2x^2}{\lambda L}$$

であり、 α とは

$$F_N = \alpha^2$$

の関係がある。

参考文献

- 1) M.Born & E.Wolf :Principles of Optics,7th edition
(草川徹訳:光学の原理(東海大学出版会、2005)
- 2) 草川 徹:レンズ設計者のための波面光学(東海大学出版、東京、1976)
- 3) 牛山善太、草川徹:シミュレーション光学(東海大学出版会、東京、2003)
- 4) 牛山善太:波動光学エンジニアリングの基礎(オプトロニクス社、東京、2005)