提供：Optical Solutions
株式会社オプティカルソリューションズ
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-16-2（F ビル 6 階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/
e-mail:info@osc-japan.com

光学設計ノーツ

光学設計ノーツ　１７（ver.1.0）

クラウジウスの関係より導く正弦条件

株式会社タイコ　牛山善太

正弦条件とは、良好に収差補正された結像光学系が必ずある程度は満たしている重要な条件である。また、結像共役関係における輝度の不変性も照明光学系、結像光学系の明るさを考えるためには重要な基本原理である。この“正弦条件”と“輝度の不変則”は“クラウジウスの関係”と呼ばれる関係式により結びついている。本稿ではこのクラウジウスの関係を考え、共役関係における輝度不変の法則を導き、そしてそこから正弦条件について言及する。

１．　共役結像関係における輝度の不変性

光軸（共軸系の場合）に接して位置する微小な光源面積 *dS* の共役関係にある結像 *dS'* を取り扱う。
図 1 にある様に、物界の屈折率を *n*、像界の屈折率を *n'* とするとき、光軸上に点 A を考えると、軸上の収差が無ければ、その点像 A’も光軸上に存在するはずである。ここで A を含み光軸に直交して存在する微小な光斑 *dS* を考える。*dS* のメリディオナル断面上（紙面上）の長さを *dr* として、*dS* 上、A から *dr* の距離に点 B をとる。

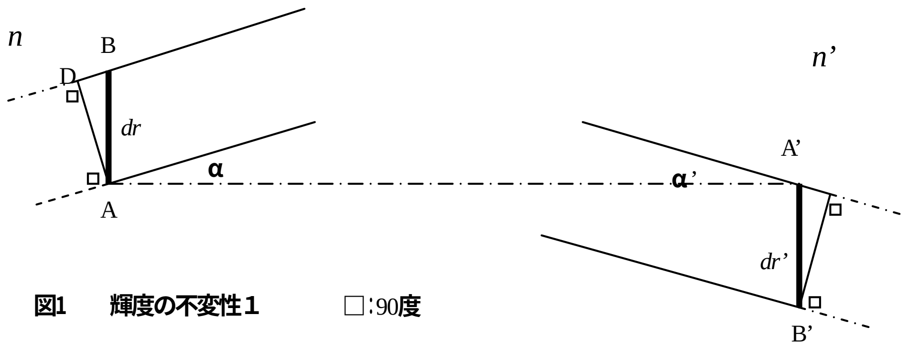

図1　輝度の不変性１　□:90度

A から A’に達する光線の経路には様々なものが考えられるが、光軸と角度αを為し A から射出し、光軸と角度α’を為して A’に達する光線を考えよう。さらに、B の ds’上の像点 B’を考え、B から B’に到達する光線のうち、光線 AA’に平行に B から射出する光線を考える。（また、A’から B’の距離を *dr'* として像 *dS'* のメリディオナル断面内の長さを表わすものとする。）この時、A から光線 BB’へ下した垂線の交点を D とする。そして、光路長[DB’]と、光線 AA’に沿っての光路長が等しくなる点 C’を像界の光線 AA’上にとる。

これらの光線は双方とも線分 AD に直交して出発し、光路長が線分 C’B’上で互いに一致する。線分 AD をこれら光線の属する共通の波面と考えれば、C’B’を含む曲線上では、それを像界の共通の波面の切り口として、それぞれ直交しているはずである。ここでは、曲率を持った波面の切り口も、直線に近似できる程度の微小な面積、大きさを *ds,ds'* に想定する。そうすると、線分 C’B’をこれら 2 つの逆行光線の共通の波面の一部と考えることが出来る。

$$[B'D]=[C'A]$$

$$\overline{DB}\perp\overline{AD}\quad 、\overline{C'B'}\perp\overline{A'C'}$$

また図より

$$[AC']=[AA']+[A'C'] \qquad (1a)$$

$$[DB']=[BB']+[DB] \qquad (1b)$$

(1a)(1b)式の片々の差を採ると、左辺同士は等しいので

$$[AA']-[BB']=[DB]-[A'C'] \qquad (2)$$

よって図１より

$$[AA']-[BB']=ndr\sin\alpha-n'dr'\sin\alpha' \qquad (3)$$

となる。さて、ここで図２にある様に、点 A から光線 AA'に対し微小な角度 $d\beta$ をなして射出する光線を考えよう。この光線も A の共役点である A'を通過するので光線 $\overline{\overline{AA'}}$ と表す。像界で光線 AA'となす微小な角度を $d\beta'$ とする。

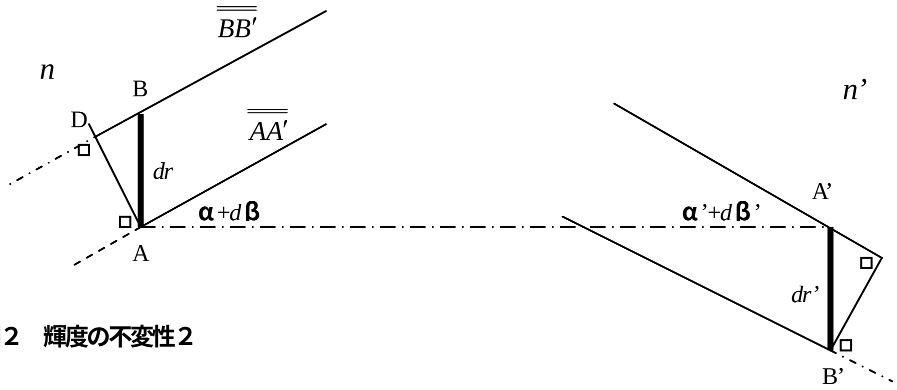

図２　輝度の不変性２

すると、図１における BB'に対応する光路を $\overline{\overline{BB'}}$ として、図１においての角度αが $d\beta$ 増加した以外はまったく同様に取り扱えて、（３）式より

$$\left[\overline{\overline{AA'}}\right]-\left[\overline{\overline{BB'}}\right]=ndr\sin(\alpha+d\beta)-n'dr'\sin(\alpha'+d\beta') \qquad (4)$$

$d\beta$、$d\beta'$ ともに微小量なので（４）式を整理して

$$\left|\overline{\overline{AA'}}\right| - \left|\overline{\overline{BB'}}\right| = ndr\left(\sin\alpha + d\beta\cos\alpha\right) - n'dr'\left(\sin\alpha' + d\beta'\cos\alpha'\right) \qquad (5)$$

そもそも BB'間にも無収差の共役関係を想定しているので、(3)、(5)式におけるそれぞれの B'は一致した像点と看做しているわけであるが、そうすると、点 A と A',B と B'はそれぞれ共役関係にあるので

$$\left|\overline{\overline{AA'}}\right| = \left[AA'\right] \quad 、\quad \left|\overline{\overline{BB'}}\right| = \left[BB'\right] \qquad (6)$$

よって（３）式と（５）式の辺々の差をとり式を整理すると

$$ndrd\beta\cos\alpha = n'dr'd\beta'\cos\alpha' \qquad (7)$$

となる。ここで、dr、dr'と光軸を含む平面と垂直方向の平面（図１における紙面と垂直の方向）を考え、図３にある様に、この平面内での光源、その像の長さ、dt、dt'、そして点Ｄ,Ｄ'、微小角度$d\gamma$、$d\gamma$をとる。

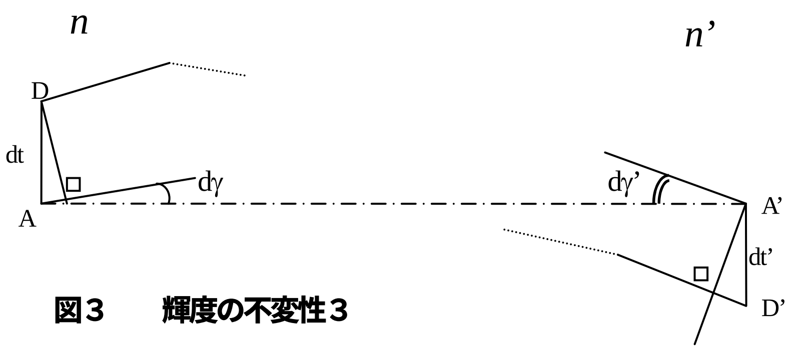

図３　　輝度の不変性３

これらの関係は前述の断面内のα＝０の場合と同じなので、同様にして

$$ndtd\gamma = n'dt'd\gamma' \qquad (8)$$

なる関係が得られる。ここで（７）、（８）式を辺々掛け合わせれば

$$n^2 drd\beta dtd\gamma\cos\alpha = n'^2 dr'd\beta'dt'd\gamma'\cos\alpha' \qquad (9)$$

ここで光源、光斑の微小面積について

$$dS = drdt \quad 、dS' = dr'dt'$$

dS'、dSから張られる立体角については

$$d\Omega = d\beta d\gamma \quad 、d\Omega' = d\beta' d\gamma'$$

と考えられ、（9）式は以下の如くに表わすことができる。

$$n^2 \cos\alpha dSd\Omega = n'^2 \cos\alpha' dS' d\Omega' \qquad (10)$$

（１０）式をクラウジウス（Clausius）の関係と呼ぶ。また、物界、光源から放射される放射束と、像界において光源の結像に寄与する放射束は、光学系によるエネルギーの損失が無いとすれば、保存され、物界での輝度を B、像界での輝度を B'とすれば

$$B\cos\alpha dSd\Omega = B'\cos\alpha' dS' d\Omega' \qquad (11)$$

となるので、（１１）式と（１０）式の辺々商をとると

$$B = \left(\frac{n}{n'}\right)^2 B' \qquad (12)$$

物界と像界の屈折率が共に１であるとすれば、

$$B = B' \qquad (13)$$

となり、物像共役関係においても上述の細い光束に沿っての輝度が保存されることが理解できる。

２．　正弦条件

(10)式における $d\Omega$、$d\Omega'$は微小な立体角を表わしており、(10)式はこの微小な範囲に対して成立している。ここで、図 4 にある様に、光軸上に存在する微小な面積 dS を持つ面光源から、光学系に対し有限な角度の開き半角 u で表わされる円錐内に光線が放射されている場合を考えよう。この場合、u に対応して像界にも面積 dS の光源の像に張られる角度 u が設定できる。

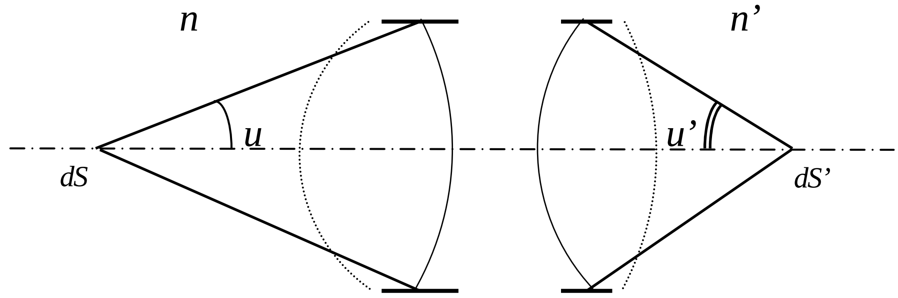

図4　　物側、像側の立体角

ここで、共軸光学系の円形開口（絞り）を仮定して、前述の点 A から張られる微小立体角を角度 α を保ったまま光軸を中心として回転させた場合を考えよう。（図 5）すると A と光学系の入射瞳の縁との距離 r と、r を半径とする球表面上のリング状の面積 dA とによって新たに立体角 $d\Omega$ が定義される。

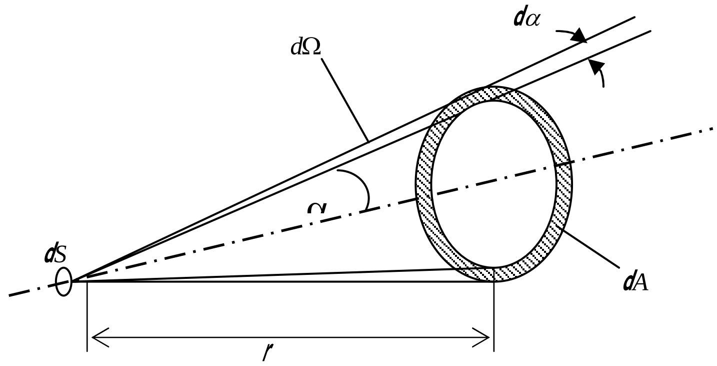

図５　　立体角 $d\Omega$

微小面積 dS、dS はともに円形としても上述のクラウジウスの関係の導出には矛盾がないので、ここで定義される立体角に対しても(10)式の関係が成り立っているはずである。

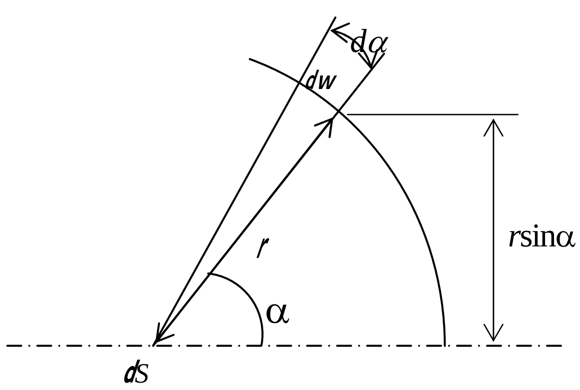

図6　　メリディオナル断面内の dw

さて、この新しい立体角 $d\Omega$ を導こう。メリディオナル断面内での dA の微小な幅を図６にある様に dw とすれば

$$dw = rd\alpha$$

となるので

$$dA = rd\alpha 2\pi r \sin\alpha$$

よって

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = 2\pi \sin\alpha d\alpha \qquad (14)$$

(10)式は以下の通りになる。

$$n^2 \cos\alpha dS \sin\alpha d\alpha = n'^2 \cos\alpha' dS' \sin\alpha' d\alpha' \qquad (14A)$$

ここで、両辺をそれぞれα、α’で積分する事を考えたい。両辺を異なる変数で積分する場合、それらの変数同士の関係が重要になり、ここでは

$$\alpha' = \frac{u'}{u}\alpha \qquad (14B)$$

の単純な関係を想定する。さらに(14A)式を簡便のため

$$f(\alpha)d\alpha = g(\alpha')d\alpha'$$

と置く。すると

$$f(\alpha) = g\left(\frac{u'}{u}\alpha\right)\frac{d\alpha'}{d\alpha} = g\left(\frac{u'}{u}\alpha\right)\frac{u'}{u} \qquad (14C)$$

辺々をαで、０から u の範囲で定積分して

$$\int_0^u f(\alpha)d\alpha = \int_0^u g\left(\frac{u'}{u}\alpha\right)\frac{u'}{u}d\alpha \qquad (14D)$$

(14D)式右辺の変数を改めて(14B)式のα’とすれば、αが０から u まで変化する時、α’は u' まで変化するので

$$\int_0^u f(\alpha)d\alpha = \int_0^{u'} g\left(\frac{u'}{u}\alpha\right)d\left(\frac{u'}{u}\alpha\right) = \int_0^{u'} g(\alpha')d\alpha'$$

従って、(14A)式は物界、像界でそれぞれ入射瞳、射出瞳に張られる全立体角について定積分する形に成り、

$$n^2 dS\int_0^u \cos\alpha\sin\alpha d\alpha = n'^2 dS'\int_0^{u'} \cos\alpha'\sin\alpha' d\alpha' \qquad (15)$$

と出来る。ここでは dS のみならず dS' も α、α'の変化に対し変化しないと仮定している事に注意を要する。また、(14B) 式の関係が複雑化し、例えば2次式になるとき、被積分関数において $g(k\alpha^2)\times k\alpha$（k：定数）の形に成り(14D)式に置けるような簡潔な関係は得られない。

さて、(15)式の辺々積分を実行して整理すると

$$\frac{dS'}{dS} = \frac{n^2\sin^2 u}{n'^2\sin^2 u'} \qquad (16)$$

dS' と dS の比は本来、結像横倍率β'の２乗となるはずなので、(16)式は

$$\beta' = \frac{n\sin u}{n'\sin u'} \qquad (17)$$

この(17)式は正弦条件と呼ばれ、光学設計において、また、幾何光学的結像を考える上で非常に重要な関係である。

光軸上に存在する点 A が無収差に A'に結像するとすれば、αの変化によって A'を含む光軸と垂直な平面、像面の光軸方向の位置は変化しない。もしこの時、(17)式で表わされる正弦条件が満たされないとすれば、それは結像倍率が一定でなくなり、B の位置が定まっている場合、結像倍率を決めるのは B'の位置であるから、軸外物点 B から射出した光線の像面上での到着位置が微小光束[クラウジウスの関係導出の際には無収差としている。]の角度座標α[この値は微小である必要は無い。従って、αの異なる微小光束ごとに収束点 B'の位置が異なる事、つまり ds'が一定でなくなる事は十分に有り得る。]により異なり、B'がαの値の変化により、一つの点として存在しなくなることを、つまり収差の存在を意味する。

正弦条件は、光軸上の収差（球面収差）が無いとき、光軸近傍の軸外物点からの同族光束内の総べての領域において、微小光束の取り方の変化により倍率のずれ（コマ収差）の生じないための条件であり、結像光学系の構成上、最も基本的な条件の一つとなる。使用に耐え得る結像光学系の殆どのものが、この正弦条件をある程度満たしていると考えて差し支えない。

３． 参考文献

1) **鶴田匡夫：第4・光の鉛筆 (新技術コミュニケーションズ、東京、1997)**

2) **牛山善太、草川徹：シミュレーション光学 (東海大学出版会、東京、2003)**