光学設計ノーツ　１９（ver.1.0）

輝度不変則に拠らない正弦条件の導出

株式会社タイコ　牛山善太

これまで既に、正弦条件については解説させていただいた。そこでは輝度不変則を利用した導出を行なった。ここでは、よりオーソドックスな光線光学的導出方法について解説させていただく。内容は主に下記、参考文献欄の文献により紹介されている内容による。

１．　有限倍率時、軸上の正弦条件

ここで、光路図をもって正弦条件がどのように成立するか考えてみよう。

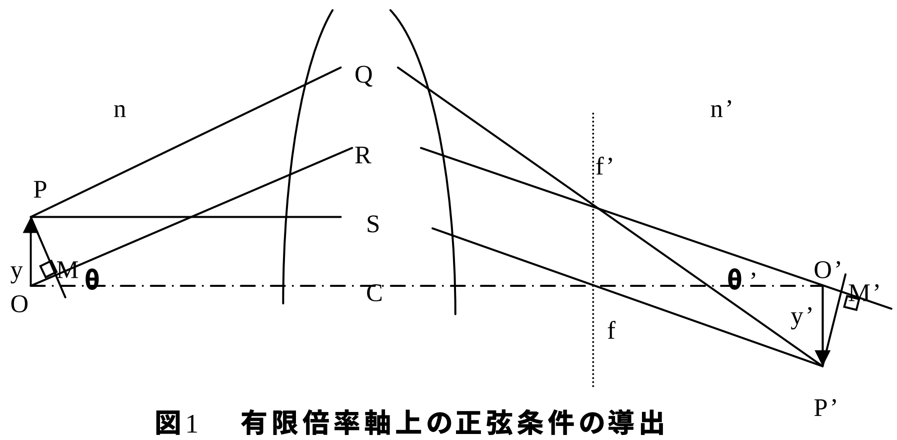

図1　有限倍率軸上の正弦条件の導出

図１において、０の像 O'が収差無く結像していて、微小物体高ｙにおける物点 P の像 P'にも同様の無収差の結像が起きているとする。まず、光軸に沿って O から C を経て O'に到達する光線を考える。また同様に O を出発して光軸方向ではなく、光軸と角度θを為し O,R,O'と言う順に進む光線も考える。このとき光軸と角度θ'を為し O'に到達するとする。さらに軸外物点 P から光軸に平行に出発し S を通過し P'に至光線を考える。この光線は当然、像側焦点位置ｆを通過するはずである。また同様に P から今度は、先般の光線 ORO'と同じ光軸との角度の光線の射出を考える。この光線は PQP'と言う光路を通るとする。

するとこの場合にも物界において光線 PQ と OR は平行であるから、近軸像平面上の f'で交わる事になる。また P から光線 OR に下した垂線の交点を M、P'から光線 RO'への同様な垂線の交点を M'とする。

すると、それぞれの光路長に沿っての光路長を考えれば、軸上は無収差であるから（球面収差が無い）、

[ORO'] ＝[OCO']

軸外結像においても P,P'間の結像に収差が無ければ（コマ収差が無い）、

[PQf'P'] ＝[PSfP']

であり、これらの辺々差をとって

[ORf']－[PQf']＋[f'O']－[f'P']＝[OCf]－[PSf]＋[fO']－[fP']　　-(1)

図 1 において

１）　波面 PM で表される平面波の収束点が f'である。

２）　y'は微小な量であり、波面 P'M'の収束点も f'と考えれば、同一波面上の点から f'までの光路長は常に等しく、f'P'　f'M'。

３）　同様に fO'　ｆP'も成立する。

よって、

[OM]－[O'M']＝[fO']－[fP']＝０

従って物界、像界の屈折率をそれぞれ n,n'とすれば

$$ny\sin\theta - n'y'\sin\theta' = 0$$

$$\frac{n\sin\theta}{n'\sin\theta'} = \frac{y'}{y} = \beta' \text{（横倍率）} \qquad \text{-(2)}$$

これが所謂、正弦条件である。

２．軸外の正弦条件

上述の考え方は軸外のメリディオナル面内での正弦条件導出の際にも、OCO’を軸外光束主光線として扱えば、そのまま応用できる。（図 2 参照）

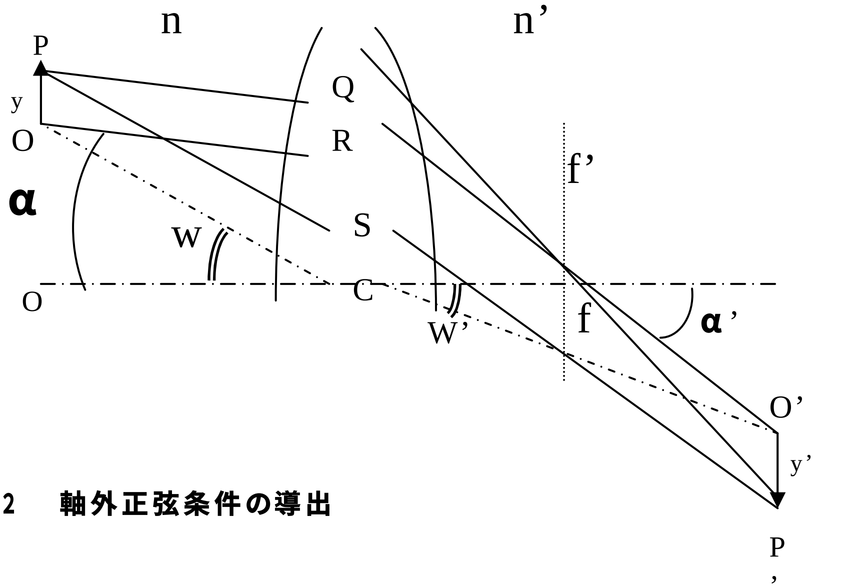

図2　軸外正弦条件の導出

図 2 にある様に、軸外の物点 O が軸外の像点 O’として無収差で結像している場合を考える。O から微小距離 y にある軸外物点 P の、O’からやはり微小距離 y’離れた像 P’を考える時、上記(1)式がそのまま成り立つ。

｛[ORf’]－[PQf’]｝＋｛[f’O’]－[f’P’]｝＝｛[OCf]－[PSf]｝＋｛[fO’]－[fP’]｝　(1’)

ここで、光線 OR が光軸と為す角度をα、光線 Rf’O’が光軸と為す角度をα’、物点 O と前側主点を結ぶ光線の光軸との角度をｗ、後側主点から像点 O’に達する光線の光軸と為す角度をｗ’とすれば、(1’)式の中括弧内の項がそれぞれ以下の４項に対応し、

$$ny\sin\alpha - n'y'\sin\alpha' = ny\sin w - n'y'\sin w'$$

$$ny(\sin\alpha - \sin w) = n'y'(\sin\alpha' - \sin w') \qquad (3)$$

３．倍率無限時の軸上の正弦条件

この場合も殆ど既述と同じ考え方が用いられる。

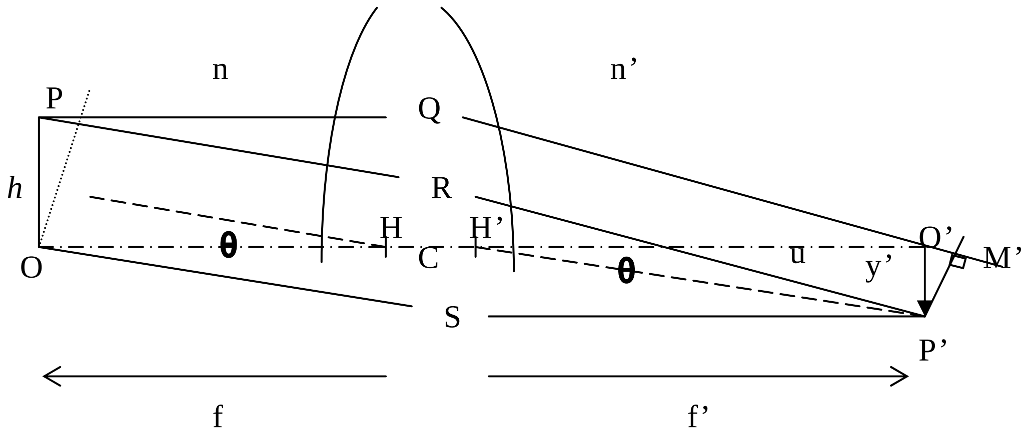

図3　倍率無限時、軸上の正弦条件の導出

図 3 において無限円点光源からの光軸に平行な光線の一部を PQ と表現し、この光線が近軸像点 O'に光軸と角度 u'を為し達している。P から光軸に下した垂線の交点を O、PO 間の距離を h とする。h は微小な値である必要は無い。

さらに P から光軸と微小な角度θを為し光学系に入射する光線 PR を考える。この光線は像界で近軸像面上の点 P'に到達する。O'P'の距離を y'とする。y'も微小な量と成る。この時 P は H,H'を前側主点、後側主点とする時、OH＝f と成るように取ってある。当然、HO'＝f'でもある。

さらに O から PR と同じ角度を光軸と為し光学系に入射する光線を考える。当然この光線は、P'での軸外結像においてこの光学系が無収差であれば近軸像面上、P'において光線 PR と交わるはずである。すると

[PQO']＝[OCO']

[PRP']＝[OSP']＋$nh\sin\theta$

辺々引き算すると、

$$-n'y'\sin u' = -nh\sin\theta$$

y'は微小量なので、y'/f'=θ'、sinθ　θであるから

$$-n'f'\theta'\sin u' = -nh\theta \qquad (4)$$

また、主点入射し、射出する光線の角度の関係は

$$\theta' = \frac{n}{n'}\theta \qquad (5)$$

であるから(4)式は

$$f' = \frac{h}{\sin u'} \qquad (6)$$

となる。これが倍率無限時の軸上の正弦条件である。

４．参考文献

1） **草川　徹：基礎光学（東海大学出版会、東京、1997）**

2） **鶴田匡夫：第４・光の鉛筆　（新技術コミュニケーションズ、東京、1997）**