光学設計ノーツ

光学設計ノーツ　２　（ver.1.0）
薄い膜による干渉・光学薄膜の基礎

株式会社　タイコ
牛山善太

今回は光学薄膜を理解する上で基礎となる、任意の屈折率を持った基盤平面上の、平面により構成される薄い膜による干渉について考える。一般的には反射防止膜を基礎的に理解するために良く用いられるテーマである。さらにここではちょっと踏み込んで、反射防止膜の解説を通じて波動の特質についても触れさせていただきたい。

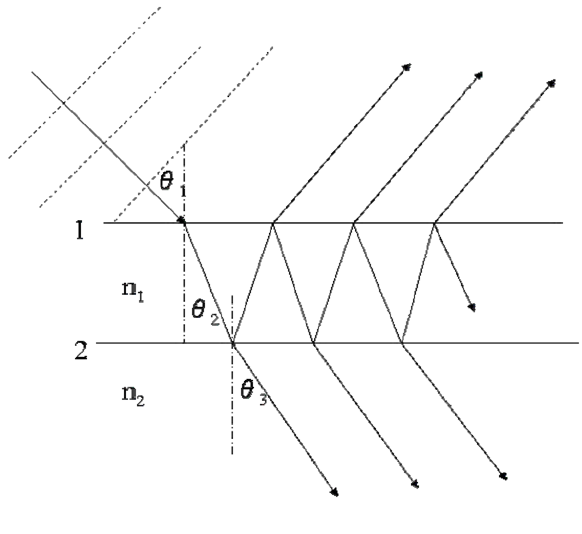

図1

１．薄い平面板としてのモデル

図 1 にある様に、媒質境界面番号を定め、基盤の屈折率を n_2、厚さ h の薄膜の屈折率を n_1、薄膜の外側を空気 $n_0=1$ とする。また、光波（無限に広がる平面波）が１から２へ進む場合の第一面における振幅透過率、振幅反射率をそれぞれ、t_1, r_1 とし、第 2 面につい

ても同様に t_2, r_2 を定義する。光波が２から１に進む場合には上記割合にダッシュをつけて表現するものとする。すると、空気中に戻ってくる振幅 u_r を得ようとすれば、初期入力複素振幅を u_0、薄膜内を片道通過する際の光波の位相変化をδとして、

$$u_r = u_0 r_1 + u_0 t_1 r_2 t_1' \exp(i2\delta) + u_0 t_1 r_2 r_1' r_2 t_1' \exp(i4\delta) + u_0 t_1 r_2 r_1' r_2 r_1' r_2 t_1' \exp(i6\delta) + \cdots \quad (1)$$

となる。ところで境界面の屈折・反射においての Fresnel の公式[参考文献 3)p42] より媒質１から２への入射角、屈折角をそれぞれθ$_1$、θ$_2$とすればｓ偏光成分について、

$$r_s = \frac{-\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad , \quad t_s = \frac{2\sin\theta_2 \cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (2)$$

また、媒質２から媒質 1 へ上記の場合と逆に進む光波を考えれば、θ$_1$、θ$_2$が入れ替わるだけであるから

$$r_s' = \frac{-\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad , \quad t_s' = \frac{2\sin\theta_1 \cos\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (3)$$

よって(2)(3)式より

$$r_s = -r_s' \quad , \quad t_s t_s' + r_s^2 = 1 \quad (4)$$

また、ｐ偏光成分について,Fresnel の公式[参考文献 3)p44] は

$$r_p = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad , \quad t_p = \frac{2\sin\theta_2 \cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$r_p' = \frac{\tan(\theta_2 - \theta_1)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad , \quad t_p' = \frac{2\sin\theta_1 \cos\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)\cos(\theta_2 - \theta_1)} \quad (5)$$

従って、やはり

$$r_p = -r_p' \quad (6)$$

また

$$r'^2_2+t_2t'_2=\frac{\sin^2(\theta_1-\theta_2)\cos^2(\theta_1+\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}+\frac{\sin^2(\theta_1+\theta_2)-\sin^2(\theta_1-\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}$$
$$=\frac{\sin^2(\theta_1-\theta_2)\{1-\sin^2(\theta_1+\theta_2)\}+\sin^2(\theta_1+\theta_2)-\sin^2(\theta_1-\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}=1$$

よって、より一般的に

$$r=-r' \quad , \quad tt'+r^2=1 \tag{7}$$

となり、これを Stokes の定理と呼ぶ。

さて、この関係を(1)式に持ち込めば

$$u_r=u_0r_1+u_0r_2(1-r_1^2)\exp(i2\delta)-u_0r_2^2r_1(1-r_1^2)\exp(i4\delta)+u_0r_2^3r_1^2(1-r_1^2)\exp(i6\delta)+\cdots$$

右辺第 2 項からの等比級数は公比が

$$-r_1r_2\exp(i2\delta)$$

となるので、その収束値より

$$u_r=u_0r_1+\frac{u_0r_2(1-r_1^2)\exp(i2\delta)}{1+r_1r_2\exp(i2\delta)}=\frac{u_0\{r_1+r_2\exp(i2\delta)\}}{1+r_1r_2\exp(i2\delta)} \tag{8}$$

従って、この系から反射される光波の強度（単位面積あたりのエネルギー）は[参考文献 3),P21]

$$I_r=n_0|u_r|^2=u_r\cdot u_r^*=u_0^2\frac{r_1+r_2\exp(i2\delta)}{1+r_1r_2\exp(i2\delta)}\cdot\frac{r_1+r_2\exp(-i2\delta)}{1+r_1r_2\exp(-i2\delta)}$$
$$=u_0^2\frac{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos 2\delta}{1+r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos 2\delta} \tag{9}$$

となる。

さて、今度は基盤内に透過する振幅について考えると、

$$u_t=u_0t_1t_2\exp(i\delta)+u_0t_1r_2r'_1t_2\exp(i3\delta)+u_0t_1r_2r'_1r_2r'_1t_2\exp(i5\delta)+u_0t_1r_2r'_1r_2r'_1r_2r'_1t_2\exp(i7\delta)+\cdots$$

やはり、Stokes の定理を用いて

$$u_t=u_0t_1t_2\exp(i\delta)-u_0t_1r_2r_1t_2\exp(i3\delta)+u_0t_1(r_2r_1)^2t_2\exp(i5\delta)-u_0t_1(r_2r_1)^3t_2\exp(i6\delta)+\cdots$$

やはり級数の収束値を考え

$$u_t = u_0 \frac{t_1 t_2 \exp(i\delta)}{1 + r_2 r_1 \exp(i2\delta)} \qquad (10)$$

従って強度は

$$I_t = n_2 {u_0}^2 \frac{(t_1 t_2)^2}{1 + (r_2 r_1)^2 + 2 r_2 r_1 \cos 2\delta} \qquad (11)$$

となる。

もし、(9)式において $r_1=r_2=r$ なる条件が満たされているとすれば(9)式は

$$I_r = u_0^2 \frac{2r^2 (1 + \cos 2\delta)}{1 + r^4 + 2r^2 \cos 2\delta} \qquad (12)$$

となり cos2δ＝－1 の時、つまりmを整数としてδ=(2m－1)πである時、(12)式より反射光強度は０となる。これが反射防止膜（コート）の原理である。

さて、この時、透過光強度について考えると、屈折後の光束の断面積の変化も考慮すると

$$n_1 t_1'^2 u_0^2 \cos\theta_2 + r_1^2 u_0^2 \cos\theta_1 = u_0^2 \cos\theta_1$$

$$t_1^2 = \frac{\cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_2}\left(1 - r_1^2\right) \qquad (13)$$

同様に考えて

$$t_2^2 = \frac{n_1 \cos\theta_2}{n_2 \cos\theta_3}\left(1 - r_2^2\right) \qquad (14)$$

上記のように $r_1=r_2=r$ とすれば

$$\left(t_1 t_2\right)^2 = \frac{\cos\theta_1}{n_2 \cos\theta_3}\left(1 - r^2\right)^2 \qquad (15)$$

従って入射光束と透過光束におけるエネルギーの比を取れば(11)(15)式より

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_t} = \frac{I_0 \cos\theta_1}{I_t \cos\theta_3} = 1 \qquad (16)$$

となり、入射光と反射光＋透過光の間で当然のことながらエネルギーが保存される事が分

かる。

２．波動の特質

上記により反射防止膜の原理は検討できた。しかし、ここで、波動としては、振幅が本来は反射界にも存在しているのに、それらが互いに打ち消しあい、この界から消滅しまう事に納得が行かない方も居られるかもしれない。打ち消される前の反射波は単独で、その振幅の 2 乗に比例するエネルギーを持っていると考えられ、このエネルギーが忽然と姿を消してしまうのである。

波動については線形の重ね合わせが可能であり、フーリエの理論によれば幾種類かの正弦波の合成・重ね合わせにより任意の波動が再現できる。つまり複数の波動の重ねせにより出来る一つの波動場は、その要素となる複数の波動・振幅が同時に存在する波動場と相等しい事になる。よって上記の反射光の場合には、いくら数学的に複数の振幅が存在すると考えられても、物理的には、そこになにも無いのと全く同じ事になる。もし、それぞれの振幅を個別に 2 乗してエネルギーを求め得るとすればそれは、互いに時間的、空間的に独立した光波を考える場合に限られる。2 乗してしまった瞬間にその光波は単独で存在していると看做されてしまい、本来であれば合成されて表現すべき波動を、もう再現できなくなる。

複数の波動が共存する場合、単独の光波の振幅は、加算されるべき波動の変位を表す（光の場合には電磁場の強さと方向を表す）、正負の量を持つ要素としてしか働かない。そしてエネルギー的にはそれ以外の意味を持たない、これが波動の特質である。

因みに、独立に存在する（同一方向に進行して居らず、2 乗して強度を計算しうる）互いに干渉し得る波動を同一方向極近くに伝播させ、干渉させ振幅を打ち消そう、或いは強め合わせ、新たにエネルギーを生み出そうと試みると、誘電体境界面での、もしくは上記の多光束干渉による位相とび、そして波面を有限な大きさに制限することによる回折現象などによって波数ベクトルが広がりを持ち、或いはそれら要素光波の強度の変化が起こり、目的を達成する事は出来ない。

３．参考文献

1)　村田和美：光学（サイエンス社、東京、1979）

2)　辻内順平：光学概論 II （朝倉書店、東京、1979）

2)　**牛山善太：波動光学エンジニアリングの基礎（オプトロニクス社、東京、2005）**