提供：
Optical Solutions
株式会社オプティカルソリューションズ
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-16-2（F ビル 6 階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/
e-mail:info@osc-japan.com

光学設計ノーツ　２０（ver.1.0）

ペッツバール和について

株式会社タイコ　牛山善太

　これまでに触れさせていただいた正弦条件同様、光学設計において重要な指針を与えるペッツバール和について、今回は解説させていただく。主にその導出についてではあるが、導出を知る事はペッツバール和をより適切に利用できることに繋がる。

１．　導出

図１からアッベの不変量[1)] は

$$n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right)=n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right)$$

$$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}=\varphi \qquad (1)$$

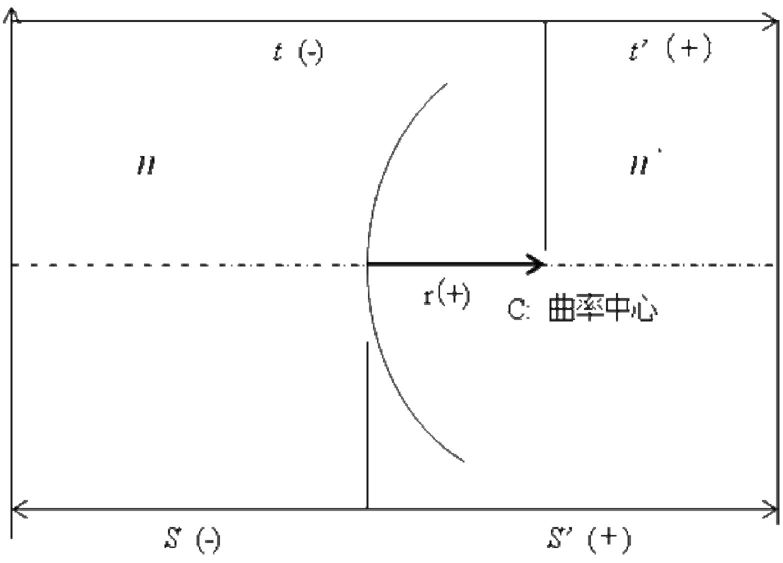

図1

Optical Solutions Corporation　http://www.osc-japan.com/

また図より

$$t = s - r \quad , t' = s' - r \qquad (2)$$

なので、(1)式は

$$\frac{n'}{t' + r} - \frac{n}{t + r} = \frac{n' - n}{r}$$

$$\frac{n't + n'r - nt' - nr}{(t' + r)(t + r)} = \frac{n' - n}{r}$$

この式を単純に整理していくと

$$-\frac{n'}{t} + \frac{n}{t'} = \frac{n' - n}{r} = \varphi \qquad (3)$$

となる。この式をスネルの式と呼ぶ。

Optical Solutions Corporation http://www.osc-japan.com/

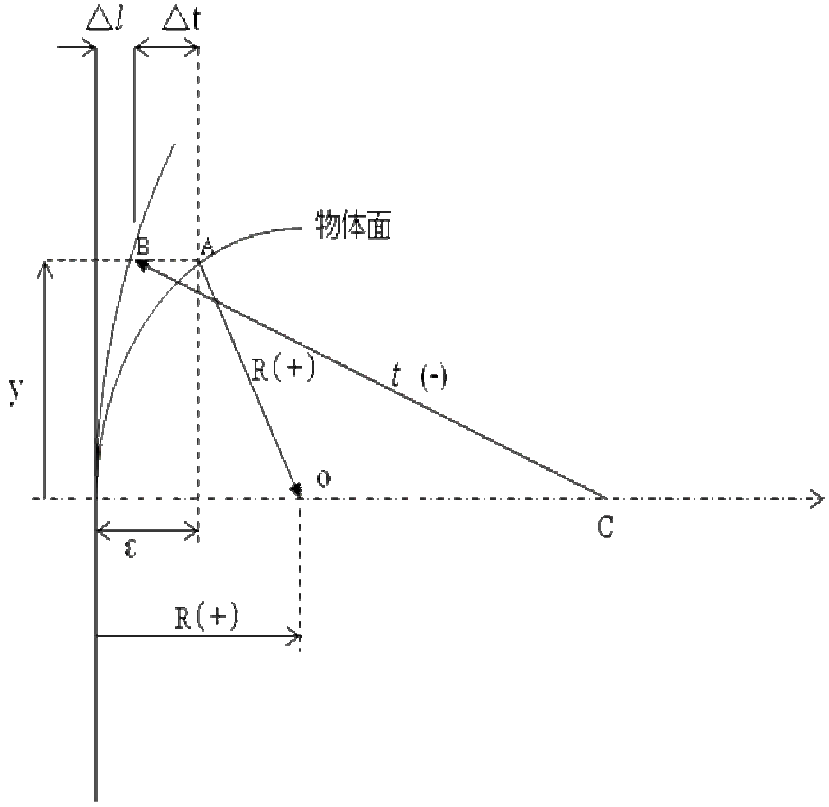

図2

さて、図 2 においては、物体面上（より一般的に曲面と考える。）の点 A に対応するその結像を点 A'とする。同様に光軸上の物点、像点が C を中心に回転した場合を考え、この時の回転移動した物点と像点を B,B'とする（図には物界における A,B のみ記してある）。この時、線分 AB の像が A'B'と成る訳であるから光軸方向の長さである、これら線分の長さの比△t'/△t は縦倍率となる。従って近軸理論の縦倍率の公式 [2)] より、横倍率を m として

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t}=\frac{n'}{n}m^2=\frac{n'}{n}\left(\frac{t'}{t}\right)^2 \qquad (4)$$

ここに

$$m=\frac{y'}{y}=\frac{t'}{t} \qquad (4.5)$$

である。さて、図 2 において

$$\varepsilon=R-\sqrt{R^2-y^2}=R-R\left(1-\frac{y^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Optical Solutions Optical Solutions Corporation http://www.osc-japan.com/

従って近似式、$(1\pm\alpha)^m = 1\pm m\alpha$ より、

$$\varepsilon = R - R\left(1-\frac{y^2}{2R^2}\right) = \frac{y^2}{2R}$$

ここで、曲率として 1/R= ρ とおけば

$$\varepsilon = \frac{\rho}{2}y^2 \qquad (5)$$

同様に像界でも同様の量、同様の関係が成り立ち

$$\varepsilon' = \frac{\rho'}{2}y'^2 \qquad (6)$$

C を中心にした球についても同様に考えて、
（物界では t は負、R は正であることに注意）

$$\begin{aligned}\Delta t &= \varepsilon - \Delta l \\ &= \frac{\rho}{2}y^2 + \frac{y^2}{2t} = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{t}\right)y^2 \qquad (7)\end{aligned}$$

同様に

$$\Delta t' = \frac{1}{2}\left(\rho' + \frac{1}{t'}\right)y'^2 \qquad (8)$$

ここで、(7)(8)式を(4)式に代入すると

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\rho' + \frac{1}{t'}\right)y'^2}{\frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{t}\right)y^2} = \frac{n'}{n}\left(\frac{t'}{t}\right)^2 \qquad \text{(4.5)式より}$$

$$\frac{\rho' + \frac{1}{t'}}{\rho + \frac{1}{t}} = \frac{n'}{n}$$

$$n\rho' + \frac{n}{t'} = n'\rho + \frac{n'}{t}$$

Optical Solutions Optical Solutions Corporation http://www.osc-japan.com/

(3)式、スネルの式より

$$n\rho' - n'\rho = -\varphi$$

$$\frac{\rho'}{n'} - \frac{\rho}{n} = -\frac{\varphi}{nn'} \qquad (9)$$

光学系に多くの境界面が存在する場合には各面ごとに(9)式の関係が成り立つから

$$\frac{\rho_2}{n_2} - \frac{\rho_1}{n_1} = -\frac{\varphi_1}{n_1 n_2}$$

$$\frac{\rho_3}{n_3} - \frac{\rho_2}{n_2} = -\frac{\varphi_2}{n_2 n_3}$$

・・・・・・・・

$$\frac{\rho_k}{n_k} - \frac{\rho_{k-1}}{n_{k-1}} = -\frac{\varphi_{k-1}}{n_{k-1} n_k}$$

となり、これらの式を加えていけば

$$-\frac{\rho_1}{n_1} + \frac{\rho_k}{n_k} = -\sum_{i}^{k-1} \frac{\varphi_i}{n_i n_{i+1}} \qquad (10)$$

と成る。右辺のシグマによる和をペッツバール和と呼ぶ。

Optical Solutions Corporation http://www.osc-japan.com/

２．ペッツバール和の意味

物体面が平面だとするとρ$_1$＝0 であるから(10)式は

$$\frac{\rho_k}{n_k} = -\sum_{i}^{k-1} \frac{\varphi_i}{n_i n_{i+1}} \qquad (11)$$

ρ$_k$は像の曲率である。物体面が平面であれば像面も平面である事が理想的であるから、そのためには

$$\sum_{i}^{k-1} \frac{\varphi_i}{n_i n_{i+1}} = 0 \qquad (12)$$

が望まれる。(12)式には各面の屈折力と硝材の屈折率しか含まれていないところが重要である。つまり、各面についての細かいパワー配置が保たれているとしても、硝材が異なれば像面の曲がり方は異なる事になる。

薄肉系が配置されているとすればひとつ薄いレンズについては、それが空気中にあり、２つの面のそれぞれのペッツバール和はφ$_1$/n、φ$_2$/n でありこの二つの面の間隔は限りなく 0 であるからこの薄肉系全体ではペッツバール和はφをその屈折力として

$$\frac{\varphi_1}{n} + \frac{\varphi_2}{n} = \frac{\varphi}{n}$$

つまり k 個の薄肉系よりなる光学系のペッツバール和に対しては像面平坦の条件は

$$\sum_{i}^{k} \frac{\varphi_i}{n_i} = 0 \qquad (13)$$

となる。非点収差が存在する場合には、メリディオナル像面もサジタル像面もペッツバール和により示される像面より乖離していく事になるが、非点収差も本来は極力減少させるべきものであり、ペッツバール和のコントロールは光学設計において重要な要素となる。

３．　参考文献

１）松居吉哉：レンズ設計法（共立出版、東京、１９７２）　P15

2）　早水良定：光機器の光学Ｉ(日本オプトメカトロニクス協会,1995)　P16

3）　草川　徹：基礎光学（東海大学出版会、東京、1997）

Optical Solutions Corporation　http://www.osc-japan.com/