提供：

株式会社オプティカルソリューションズ

〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-16-2（F ビル 6 階）
TEL：03-5833-1332　　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/
e-mail:info@osc-japan.com

光学設計ノーツ　２２（ver.1.0）

フェルマーの原理から得られること　２

株式会社タイコ　牛山善太

今回は、前回に引き続き“フェルマーの原理から得られること”について前回についての補足も含めて説明させていただきたい。式、図番等は前回から連なっている。

４．　正準方程式について

前回、リュービルの定理について触れる際、正準方程式そのものにていては解説していなかったので、ここで、再び取り上げる。

(10)式ハミルトニアンを全微分すると

$$dH = \frac{\partial(p_y\dot{y})}{\partial p_y}dp_y + \frac{\partial(p_y\dot{y})}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}dy + \frac{\partial(p_z\dot{z})}{\partial p_z}dP_z + \frac{\partial(p_z\dot{z})}{\partial \dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial z}dz - dN$$

$$= \dot{y}dp_y + p_y\frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y}dp_y + \dot{y}\frac{\partial p_y}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}dy + p_y\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}dy$$

$$+\dot{z}\frac{\partial p_z}{\partial \dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial z}dz + p_z\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial z}dz + \dot{z}dp_z + p_z\frac{\partial \dot{z}}{\partial p_z}dp_z$$

$$-\left(\frac{\partial N}{\partial x}dx + \frac{\partial N}{\partial y}dy + \frac{\partial N}{\partial z}dz + \frac{\partial N}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}dy + \frac{\partial N}{\partial \dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial z}dz + \frac{\partial N}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y}dp_y + \frac{\partial N}{\partial \dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial p_z}dp_z\right)$$

さらに整理していくと、

$$dH = \dot{y}dp_y + \dot{z}dp_z$$

$$+\left(p_y - \frac{\partial N}{\partial \dot{y}}\right)\frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y}dp_y + \left(p_z - \frac{\partial N}{\partial \dot{z}}\right)\frac{\partial \dot{z}}{\partial p_z}dp_z + \left(p_y - \frac{\partial N}{\partial \dot{y}}\right)\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}dy + \left(p_z - \frac{\partial N}{\partial \dot{z}}\right)\frac{\partial \dot{z}}{\partial z}dz$$

$$-\left(\frac{\partial N}{\partial x}dx+\frac{\partial N}{\partial y}dy+\frac{\partial N}{\partial z}dz\right)$$

また

$$P_y=\frac{\partial N}{\partial \dot{y}}=\frac{\partial N}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial x}=\dot{p}_y=\frac{\partial N}{\partial y}$$ （(8-1）式と同じ式である。）

従って(10)式は

$$dH=\dot{y}dp_y+\dot{z}dp_z-\frac{\partial N}{\partial x}dx-\dot{p}_y dy-\dot{p}_z dz \qquad (15)$$

さて、ハミルトニアンの全微分は以下の様にも表せる。

$$dH=\frac{\partial H}{\partial y}dy+\frac{\partial H}{\partial z}dz+\frac{\partial H}{\partial x}dx+\frac{\partial H}{\partial p_y}dp_y+\frac{\partial H}{\partial p_z}dp_z \qquad (16)$$

従って(15)式と(16)式を比較して

$$\dot{y}=\frac{\partial H}{\partial p_y} \quad (17\text{-}1) \quad 、\quad \dot{z}=\frac{\partial H}{\partial p_z} \quad (17\text{-}2)$$

$$\dot{p}_y=-\frac{\partial H}{\partial y} \quad (17\text{-}3) \quad 、\quad \dot{p}_z=-\frac{\partial H}{\partial z} \quad (17\text{-}4) \quad 、\quad -\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial H}{\partial x} \quad (17\text{-}5)$$

と出来る。上記(17-1)から(17-4)式はハミルトンの正準方程式である。

ところでさらに、(4)(9)(10)式より

$$H=n\dot{y}\left(1+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\dot{y}+n\dot{z}\left(1+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\dot{z}-n\left(1+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=-n\left(1+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (18)$$

また

$$n\left(1+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\left\{\frac{n^2+n^2\dot{y}^2+n^2\dot{z}^2-n^2\dot{y}^2-n^2\dot{z}^2}{\left(1+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(n^2-\frac{n^2\dot{y}^2}{1+\dot{y}^2+\dot{z}^2}-\frac{n^2\dot{z}^2}{1+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\right)$$

$$=\left(n^2-p_y{}^2-p_q{}^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (19)$$

従って、

$$H=-\left(n^2-p_y{}^2-p_z{}^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (20)$$

この関係により正準方程式、(17-1)式から(17-4)式は

$$\dot{y}=\frac{\partial H}{\partial p_y}=\frac{p_y}{\left(n^2-p_y{}^2-p_z{}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (21\text{-}1)$$

$$\dot{z}=\frac{\partial H}{\partial p_z}=\frac{p_z}{\left(n^2-p_y{}^2-p_z{}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (21\text{-}2)$$

$$\dot{p}_y=-\frac{\partial H}{\partial y}=-\frac{n\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)}{\left(n^2-p_y{}^2-p_z{}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (21\text{-}3)$$

$$\dot{p}_z=-\frac{\partial H}{\partial z}=-\frac{n\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)}{\left(n^2-p_y{}^2-p_z{}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (21\text{-}4)$$

と連立微分方程式（変数 y, z, p_y, p_z）の形として表わす事も出来る。

５． 光線の行方

前回における(6)式、或いは本連載 12 回(16)式の光線方程式、

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right)=\mathrm{grad}\,n \qquad (6)$$

は、その名の通り、屈折率が任意に分布する媒質内における光線の進行経路を示す、幾何光学的には重要な式である。12 回では屈折率が一定な媒質中では光線は直線的に進む事を

示したが、ここではより一般的な状況での光線進行経路の算出過程について述べさせていただく。

さて、ここで、(6)式左辺カッコ内のベクトルを

$$\vec{p} = n\frac{d\vec{r}}{ds} \tag{22}$$

と置けば、光線方程式(6)式は以下の二つの式に分解できる。

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \mathrm{grad}\, n \tag{23-1}$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{p}}{n} \tag{23-2}$$

ここで、光線経路に沿った距離ｓからの経路距離の微小変化量△S を考えれば、(23)式はそれぞれ

$$\frac{1}{\Delta s}\left\{\vec{p}(s+\Delta s) - \vec{p}(s)\right\} = \mathrm{grad}\, n$$

$$\vec{p}(s+\Delta s) = \mathrm{grad}n \cdot \Delta s + \vec{p}(s) \tag{24-1}$$

$$\frac{1}{\Delta s}\left\{\vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s)\right\} = \frac{\vec{p}(s)}{n}$$

$$\vec{r}(s+\Delta s) = \frac{\vec{p}(s)}{n}\Delta s + \vec{r}(s) \tag{24-2}$$

と成る。従って距離ｓの位置における、 $\vec{p}, \vec{r}$ そして屈折率、屈折率の grad が得られれば光線進行経路に沿い s'=s+△ｓの位置におけるこれらの新たな量が得られ（屈折率分布状態が分かっているとして)、滑らかにでは無いが順次 step△ｓごとの光線進行経路が計算可能であると考えられる。

ここで、これらの式を実際の計算に即して成分に分けて表現するとすれば、まず(22)式、前回の(9)式より光学的方向余弦を用いて表現して

$$p_x = n\frac{dx}{ds} = n\cos\delta$$

$$p_y = n\frac{dy}{ds} = n\cos\alpha$$

$$p_z = n\frac{dz}{ds} = n\cos\beta$$

であるから$\vec{r}$は光線通過点の位置ベクトルであるから、(24-1)(24-2)式は以下の様に表現できる。

$$n_{s+\Delta s}\cos\delta_{s+\Delta s} = \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)_{x(s)}\Delta s + n_s\cos\delta_s \qquad (25\text{-}1)$$

$$n_{s+\Delta s}\cos\alpha_{s+\Delta s} = \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)_{y(s)}\Delta s + n_s\cos\alpha_s \qquad (25\text{-}2)$$

$$n_{s+\Delta s}\cos\beta_{s+\Delta s} = \left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_{z(s)}\Delta s + n_s\cos\beta_s \qquad (25\text{-}3)$$

$$x(s+\Delta s) = \cos\delta_s\Delta s + x(s) \qquad (26\text{-}1)$$

$$y(s+\Delta s) = \cos\alpha_s\Delta s + y(s) \qquad (26\text{-}2)$$

$$z(s+\Delta s) = \cos\beta_s\Delta s + z(s) \qquad (26\text{-}3)$$

上記は、step 間を直線で近似する考え方で必要精度に応じて細かい刻みによる計算が必要となる。

参考文献

1） **荒井則一："分布屈折率レンズの光線"、微小光学の物理的基礎**
(朝倉書店、東京、1991) p. 84

2） M.Born & E.Wolf :Principles of Optics,7th edi.(Pergamon Press,Oxford,1999)
草川徹訳：光学の原理・第7版（東海大学出版会,2005)

3） G.I.Greisukh,S.T.Bobrov,S.A.Stepanov：Optics of Diffractive and Gradient-Index Elements and Systems(SPIE Optical Engineering Press,Bellingham,1997)