提供：
株式会社オプティカルソリューションズ
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-16-2（F ビル 6 階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/
e-mail:info@osc-japan.com

光学設計ノーツ　２３（ver.1.0）

フェルマーの原理から得られること　３

株式会社タイコ　牛山善太

今回も、前回に引き続き“フェルマーの原理から得られること”について記させていただきたい。ここでは前回における屈折率分布媒質内での光線追跡手法について更に考える。式、図番等は前回から連なっている。

６．　３次近似による光線追跡手法 [2)]

以下は直線近似ではなく、取り合へず、変数の微小変化に対する求めるべき関数の変化にテーラー展開による３次近似を導入して、上記の場合より step を大きく刻める事により、計算効率を高める計算法について記す。

関数 f(x)についてのテーラー展開は

$$f(s+\Delta s)=f(s)+\Delta s f'(s)+\frac{\Delta s^2}{2!}f''(s)+\frac{\Delta s^3}{3!}f'''(s)+ \qquad (27)$$

従って、ベクトル関数 $\vec{r}$ においては３回微分の項までとると(27)式より

$$\vec{r}(s+\Delta s)=\vec{r}(s)+\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)_s\Delta s+\frac{\Delta s^2}{2}\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)_s+\frac{\Delta s^3}{6}\left(\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)_s \qquad (28)$$

ここで、

$$\alpha_s=\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)_s \quad 、\quad \alpha'_s=\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)_s \quad 、\quad \alpha''_s=\left(\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)_s \qquad (29)$$

と置けば(28)式は

$$\vec{r}(s+\Delta s)=\vec{r}(s)+\alpha_s\Delta s+\frac{\Delta s^2}{2}\alpha_s'+\frac{\Delta s^3}{6}\alpha_s'' \tag{30}$$

また、(27)式より

$$\alpha(s+\Delta s)=\alpha(s)+\alpha_s'\Delta s+\frac{\Delta s^2}{2}\alpha_s'' \tag{31}$$

となる。ここで、(29)式の 2 次、3 次微分について解かなければならないが
光線方程式を解けば

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right)=\frac{dn}{ds}\frac{d\vec{r}}{ds}+n\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\nabla n \tag{32}$$

ところで全微分の定義から

$$dn=\frac{\partial n}{\partial x}dx+\frac{\partial n}{\partial y}dy+\frac{\partial n}{\partial z}dz$$

両辺を ds で割れば

$$\frac{dn}{ds}=\frac{\partial n}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial n}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial n}{\partial z}\frac{dz}{ds} \tag{33}$$

$$=\left(\frac{dx}{ds}\vec{i}+\frac{dy}{ds}\vec{j}+\frac{dz}{ds}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial n}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial n}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial n}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$=\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\nabla n \tag{34}$$

従って(32)式は

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right)=\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\nabla n\right)\frac{d\vec{r}}{ds}+n\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\nabla n \tag{35}$$

よって、

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}=\frac{1}{n}\left\{\nabla n-\frac{d\bar{r}}{ds}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\nabla n\right)\right\} \qquad (36)$$

となる。さらに以下の様に表記できる。

$$\alpha_s'=\frac{1}{n}\{\nabla n-\alpha_s(\alpha_s\cdot\nabla n)\} \qquad (37)$$

また、(36)式をさらにｓで微分すれば、

$$\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}=\frac{d\left(n^{-1}\right)}{ds}\left\{\nabla n-\frac{d\bar{r}}{ds}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\nabla n\right)\right\}+\frac{1}{n}\frac{d}{ds}\left\{\nabla n-\frac{d\bar{r}}{ds}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\nabla n\right)\right\}$$

$$=-n^{-2}\frac{dn}{ds}\left\{\nabla n-\frac{d\bar{r}}{ds}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\nabla n\right)\right\}+\frac{1}{n}\frac{d}{ds}\left\{\nabla n-\frac{d\bar{r}}{ds}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\nabla n\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n^2}\left[n\frac{d}{ds}\left\{\nabla n-\frac{d\bar{r}}{ds}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\nabla n\right)\right\}-\frac{dn}{ds}\left\{\nabla n-\frac{d\bar{r}}{ds}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\nabla n\right)\right\}\right]$$

(34)式、そして(35)式の関係（右辺２番目の中括弧内）から

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{d}{ds}\left\{\nabla n-\frac{d\bar{r}}{ds}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\nabla n\right)\right\}-\frac{1}{n}\frac{d\bar{r}}{ds}\nabla n\left\{n\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\left\{\frac{d}{ds}\nabla n-\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\nabla n\right)-\frac{d\bar{r}}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\nabla n\right)\right\}-\frac{1}{n}\frac{d\bar{r}}{ds}\nabla n\left\{n\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\left\{\frac{d}{ds}\nabla n-\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\nabla n\right)-\frac{d\bar{r}}{ds}\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\nabla n-\frac{d\bar{r}}{ds}\frac{d\bar{r}}{ds}\frac{d(\nabla n)}{ds}\right\}-\frac{1}{n}\frac{d\bar{r}}{ds}\nabla n\left\{n\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{d}{ds}\nabla n-2\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\nabla n\right)-\frac{d\bar{r}}{ds}\frac{d\bar{r}}{ds}\frac{d(\nabla n)}{ds}-\frac{d\bar{r}}{ds}\nabla n\left\{\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{d(\nabla n)}{ds}-2\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\nabla n\right)-\frac{d\vec{r}}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d(\nabla n)}{ds}+\nabla n\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)\right] \tag{38}$$

よって以下の関係が得られる。

$$\alpha_s''=\frac{1}{n}\left[\frac{d(\nabla n)}{ds}-2\alpha_s'(\alpha_s\cdot\nabla n)-\alpha_s\left\{\alpha_s'\nabla n+\alpha_s\frac{d(\nabla n)}{ds}\right\}\right] \tag{39}$$

(30)(31)式、そして(37)(39)式より前項と同様に、距離ｓの位置における、$\alpha_s,\vec{r}$ そして屈折率、屈折率の grad が得られれば光線進行経路に沿い s'=s+△ｓの位置におけるこれらの新たな量が得られ（屈折率分布状態が分かっているとして）、順次 step△ｓごとの少なくとも前項よりは滑らかな光線進行経路が計算可能である。Step も大きく取れる訳である。因みに前項の直線近似における $\vec{p}$ とはαは(23-2)式より以下の関係にある。

$$\alpha_s=\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)_s=\frac{\vec{p}}{n} \tag{40}$$

成分で記せば

$$\begin{aligned}\alpha_{sx}&=\frac{p_x}{n}=\cos\delta\\ \alpha_{sy}&=\frac{p_y}{n}=\cos\alpha\\ \alpha_{sz}&=\frac{p_z}{n}=\cos\beta\end{aligned} \tag{41}$$

である。式全体の 3 次元成分への分解については前項（連載前回）を参照していただきたい。

参考文献

１）　M.Born & E.Wolf :Principles of Optics,7th edi.(Pergamon Press,Oxford,1999)
草川徹訳：光学の原理・第 7 版（東海大学出版会,2005）

２）　G.I.Greisukh,S.T.Bobrov,S.A.Stepanov：Optics of Diffractive and Gradient-Index Elements and Systems(SPIE Optical Engineering Press,Bellingham,1997)