提供：

Optical Solutions
株式会社オプティカルソリューションズ

〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-16-2（F ビル 6 階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/
e-mail:info@osc-japan.com

光学設計ノーツ　２４（ver.1.0）

結像の評価　MTF

株式会社タイコ　牛山善太

写真レンズなどの光学系の結像性能を表わす場合に、解像力とは良く用いられる言葉であり、一般的には、設計値あるいは実測値において、この解像力が高い値を示す場合ほど、そのレンズの性能は高いと考えられている。白黒の細かい線が、一体どのくらいの細さのものまで、その光学系により再現可能かを示す指標が解像力である。実際には 1mm の中に細かい線が何本解像されているのか、ミリ１０本、ミリ１００本などの様に言われ、表現される。この解像力、あるいはその表示方法は直感的に理解し易く、また測定によって実測値も簡単に得られるので、非常に広く光学系の性能を表わす仕様として用いられている。

ところが、少し考えてみれば分かる通り、結像性能のみを問題にする場合でも、細かい被写体が写るか、写らないかのみで画像の評価をすることには無理があり、また、目視検査においても、解像していることの判断基準の決定も難しい。そう細かくない被写体を写す場合にも、その結像において個々の要素がしっかりと認識できるほどであるとしても、その写り方にはコントラストの面などにおいても違いが存在する。

より、客観的で、定量的、多面的な大量の情報が画像の評価のためには求められる。そこで、用いられるのが、MTF（Moduler Transfer Function）あるいは、OTF（Optical Transfer Function）と呼ばれる評価量である。上記の通りの扱い易さにより、解像力という性能を表わす言葉は、現在でも光学系を考える場合に多く用いられ続けているが、光学設計における性能評価、あるいは一部の写真レンズを含む、高性能な光学系の実際の性能検査においては、MTF は最も重要な評価量として用いられている。光学設計者たちは、さまざまな条件下の光学系においての十分な高さの MTF 値を得るために努力を続けている。

１．　フーリエ変換について

基本周期Tで繰り返す、波形は、周期 T の正弦波を基本として

T/2 、 T/3 、 T/4 、・・・・・

と言う、周期が T の整数分の1である正弦波の要素に分解できる。そして、それらの要素の合成として表現することができる。図1に詳細は後述するが、一例として矩形状の周期波が、要素波の合成により次第に再現されていく様子を示す。

1次元の場合、合成関数を f(x)として、n=0,1,2…に対して

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(2\pi x\frac{n}{T}\right)+b_n\sin\left(2\pi x\frac{n}{T}\right)\right\} \qquad -(1)$$

と表現することが出来る。この和、f(x)をフーリエ(Fourier)級数と呼ぶ。周期関数f(x)は(1)式にある様に、定数項と、重み付けられた、基本周波数の整数倍の周波数を持つ、cos、sin 波の合成で表わされる。(1)式における a_n、b_n は多数の正弦波の重みを表わす係数であり、フーリエ級数展開において重要な意味を持つ。それらは以下の如くに計算することが出来る。

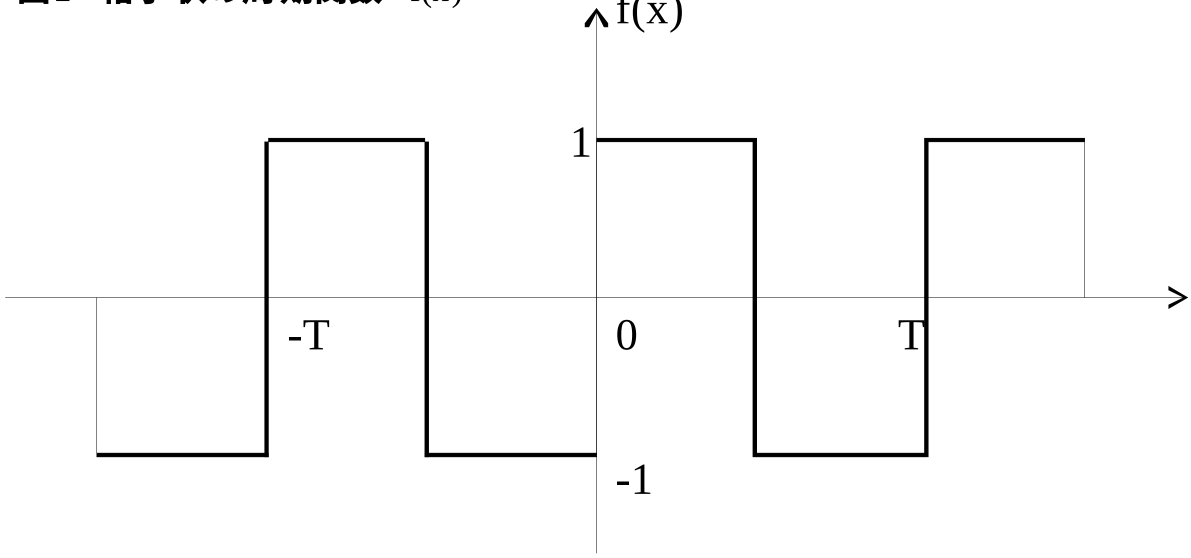
$$a_m=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos\left(2\pi x\frac{m}{T}\right)dx \qquad (m=0,1,2,\cdots) \qquad -(2)$$

$$b_m=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\sin\left(2\pi x\frac{m}{T}\right)dx \qquad (m=1,2,\cdots) \qquad -(3)$$

フーリエ係数を決定すれば周期関数 f(x)を様々な周波数を持つ正弦波の合成として表現する事ができる。

この様な表現が可能なのは(1)式の級数の**直交性**による。基本周波数の任意の整数倍 n,m 倍の周波数を持つ二つの正弦波の積分は、n=m 以外の場合には正領域と負領域における積分の絶対値が等しく成り、0になってしまう。従って、調べたい周波数の正弦波を合成関数 f(x)に乗じて積分すれば、その周波数以外の成分の積分に対する寄与は0になり、その周波数における振幅が(2)(3)式におけるように分離して得られる。それぞれが直交する座標軸による、n次元座標系における、それぞれの軸上の単位ベクトル同士の内積は、自分自身との内積の場合以外には直交するベクトルの内積として値を持たない。そこでの内積と同様の形式の計算が(2)(3)式で行われていると考えてよい。

図1　格子状の周期関数　f(x)



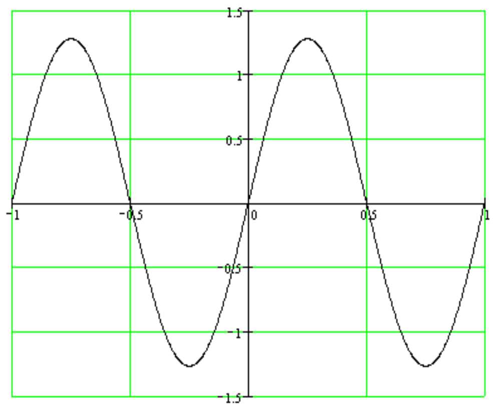


図1(a)　 f(x)**に近づく正弦波の合成。**
n=1**の正弦波による。**

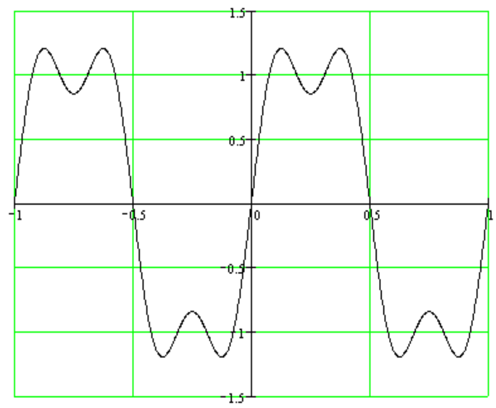


図1(b)　 n=1,n=3**の正弦波 の合成**

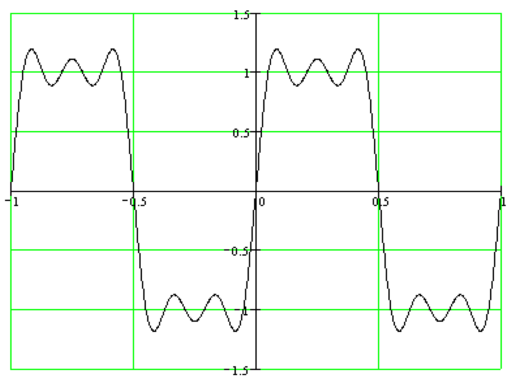


図1(c)　 n=1,n=3,n=5 **の正弦波の合成**

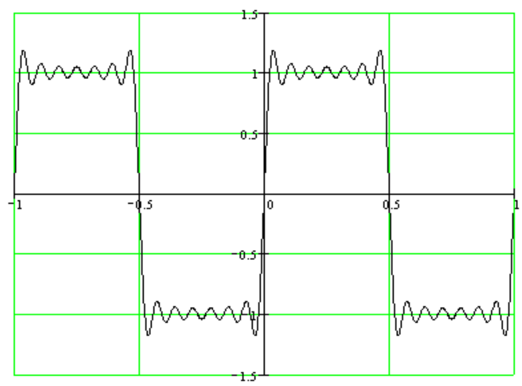


図1(d)　 n=1,n=3,n=5,n=7,n=9,n=11,n=13 **の正弦波の合成**

さて、それでは、ここで図１に示される格子状の周期関数、

$$f(x) = -1 \qquad (-T/2 \le x < 0)$$

$$= 1 \qquad (0 \le x < T/2)$$

のフーリエ級数の算出を実際に行なおう。

f(x)か０で不連続になるので、(2)、(3) 式の積分を－T/2 から０、そして０から T/2 までに分けて行なうとその結果、

$$a_n = 0$$

$$b_n = 0 \qquad (\text{n が偶数の場合})$$

$$= \frac{4}{\pi n} \qquad (\text{n が奇数の場合})$$

を得る。よて、f(x)のフーリエ級数は、

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{2\pi x}{T} + \frac{1}{3}\sin\frac{6\pi x}{T} + \frac{1}{5}\sin\frac{10\pi x}{T} + \cdots\cdot\right)$$

図１(a)から(d)に特定のｎの値まで合成した関数 f(x)の様子を示す。

ここまで、f(x)を周期を持つ関数として扱ってきた。ところが実際には、我々は、光の強度分布などの、一般的な周期を持たない関数を扱わなければならず、非周期関数に対するフーリエ級数の拡張を行なう必要がある。この拡張は周期 T を無限大と考える事により行われる。

さて、これまでｎを整数の変数とする関数と見なし、1/T の間隔で値を離散的に持っていた。

$$\nu_n = \frac{n}{T}$$

周波数は以上の様に 1/T の間隔で値を離散的に持っていた。ところが、T→∞とする事によって間隔が無限小になり、ν_n は連続的な値となる。これを周波数νと記す。すると、複素数表示を用いて、また、F(ν)をνの正弦波の重みを表すフーリエ係数として

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-2\pi i x\nu)dx \qquad -(4)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\exp(2\pi i x\nu)d\nu \qquad -(5)$$

(4)式における、F(ν)を関数 f(x)のフーリエ変換、(5)式における f(x)を F(ν)の逆フーリエ変換と呼び、F(ν)と f(x)は互いにフーリエ変換対の関係にあると言われる

２．　OTF；点像の再現について

点光源などの大きさを持たぬ発光点、あるいは無限小の時間において生起する電気信号などの、インパルスを表現する関数を定義しておけば、離散的なデータを扱うコンピュータによる様々な計算においても便利である。その一つの例として、積分値1をもつガウス関数を、その積分値はそのままに、上方に伸ばし、その幅ωを無限に細くした関数δ(x)を考えると(図2)

$$\delta(x) = \lim_{\omega \to 0} \frac{1}{\omega}\exp\left(-\frac{\pi x^2}{\omega^2}\right) \qquad -(6)$$

幅が無限に狭く、上述の通り、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \qquad -(7)$$

なる性質を保存しているので、原点においてはその値は無限大になる。この関数をディラック(Dirac)のデルタ関数(delta function)と呼び、インパルス関数として非常に重要な関数である。
また、

$$FT[\delta(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\exp(-2\pi i \nu x)dx = \exp(0) = 1 \qquad -(8)$$

となり、デルタ関数のフーリエスペクトルは常に実数、1となる。

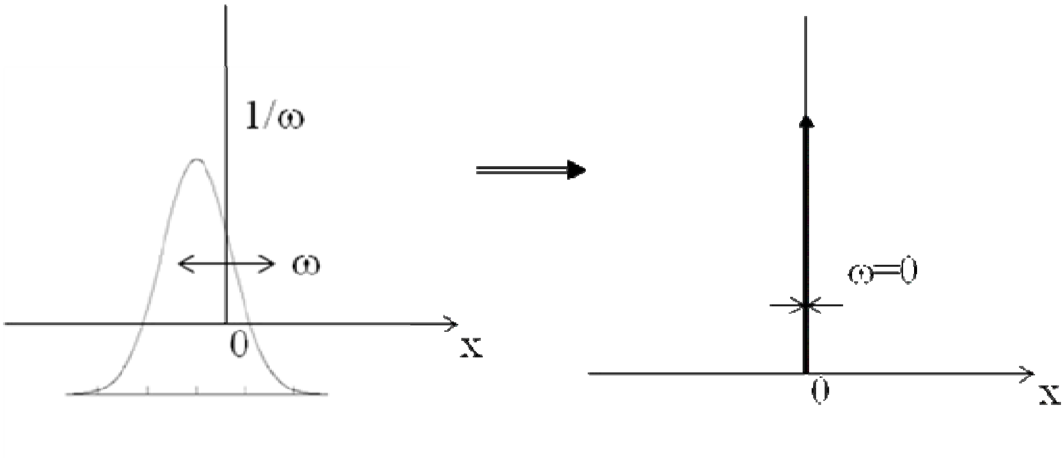


図2　　デルタ関数

ここで、上述デルタ関数で光学系における点光源、あるいは被写体となる物点を表わすこととしよう。すると(8)式から理解できるように、この点光源を表わす関数、デルタ関数は同じ強さ、振幅を持った、連続的にその周波数が変化する無限の数の cos 波の重ね合わせで表現できる。もし仮に総べての領域の周波数において、強さを損なう事無く、完全な振幅を再現できる光学系が存在するとすれば、この光学系は点光源の完全な点像を結像させる事ができる。

ところが実際の光学系においては、回折や収差の影響により点光源の像が大きさを持ってしまう。この大きさを持った強度分布をフーリエ変換すれば、一般的にそのスペクトルは周波数によって変化し、高周波成分の振幅ほど大きく減衰して行く。ある特定の周波数に着目すれば、光の強弱の分布を波として捉えて、その空間的な周波数における正弦波格子像の結像の被写体と比べた強さ、再現性を定量化する事ができる。さらに、幅広い周波数領域に着目すればその光学系の特定の物点にたいする結像性能を総合的に理解、表現する事が可能となる。

そこで、任意の周波数におけるフーリエスペクトルを、ゼロ周波数におけるフーリエスペクトルで割って正規化したものを空間周波数伝達関数または、OTF (Optical Transfer Function) と定義し、光学系の再現能力を定量的に表わす量とする。

1次元のフーリエ変換をそのまま2次元に拡張して、OTF を表現すれば、I(x,y)を像面上の点像強度分布、PSF (Point Spread Function)、s、tをサジタル、タンジェンシャル (メリディオナル) 方向の空間周波数として、

$$OTF(s,t)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I(x,y)\exp\{-2\pi i(sx+ty)\}dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I(x,y)dxdy} \qquad -(9)$$

分母の $OTF(0,0)$は構造が無い場合の明るさを表わしている。この基調の上に高周波成分の波が重なり合ってくるので、平均すれば、この $OTF(0,0)$が像の全光量を表わしている。(9)式は一般的に複素数を表わし、その絶対値を MTF (Modulation transfer function) と呼び、位相を PTF

(Phase transfer function)と呼ぶ。

３．　参考文献

１）　牛山善太、草川徹：シミュレーション光学（東海大学出版会、東京、2003）

２）　**草川　徹：レンズ設計者のための波面光学（東海大学出版、東京、1976）**

３）　**谷田貝豊彦：光とフーリエ変換(朝倉書店,東京,１９９２）**