

光学設計ノート 25 (ver.1.0)

結像の評価 正弦波格子チャートと MTF

株式会社タイコ 牛山善太

今回は正弦波状の格子チャートの光学系による結像を例にとり、OTF そして MTF、PTF の特質について解説させていただきたい。

1. 正弦波格子チャートと線像強度分布の畳み込みにより像強度分布を得る

ここで任意の周波数 s を持つ、正弦波格子に着目してみると、この正弦波格子模様に直角方向に x 座標を採り、この方向の座標に対する物体の1次元の強度分布を考えると、格子模様が乗る、平均的バックグラウンドの明るさを a 、正弦波格子の最大振幅を m とすれば、一般的に、物体の強度分布 $O(x)$ は

$$O(x) = a + m \cos 2\pi s x \quad (1)$$

と表現できる。ここで、1次元における光学系の結像による線像強度分布 LSF を $I(x)$ と記せば、(1) 式で表わされる被写体の、光学系による等倍結像の強度分布 $F(x)$ は、(1) 式と $I(x)$ が畳み込まれることによって(図 1)

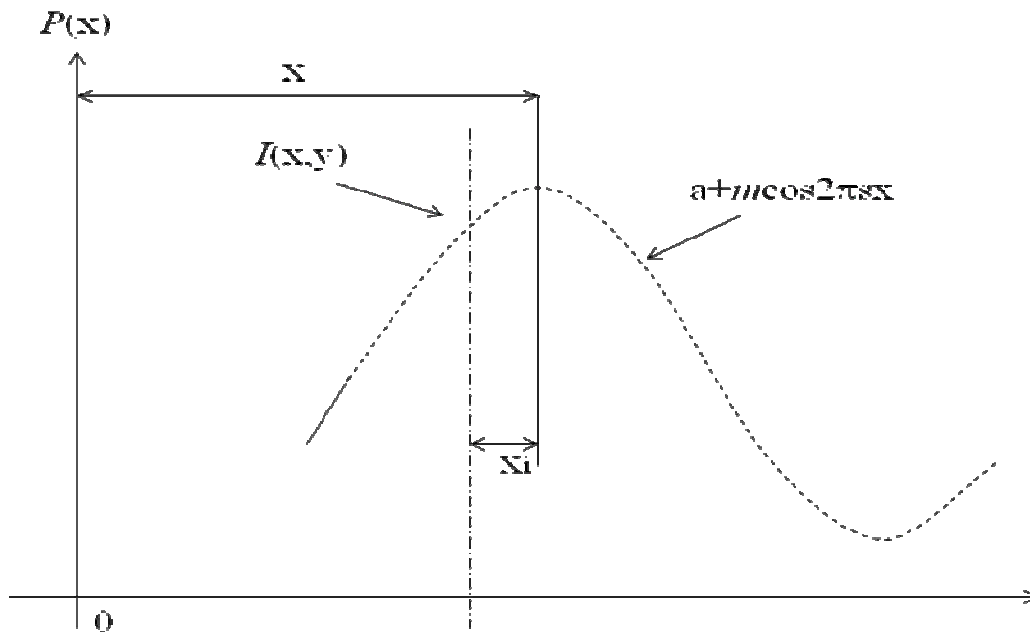


図-1 P(x)を得るための畳み込み積分

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \{a + m \cos 2\pi s(x - x_i)\} I(x_i) dx_i \quad (2)$$

となる。ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(x_i) dx_i = 1 \quad (3)$$

として、正規化すると三角関数の加法定理から

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{a + m \cos 2\pi s x \cdot \cos 2\pi s x_i + m \sin 2\pi s x \cdot \sin 2\pi s x_i\} I(x_i) dx_i \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} I(x_i) dx_i + m \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi s x \cdot \cos 2\pi s x_i \cdot I(x_i) dx_i \\ &\quad + m \int_{-\infty}^{\infty} \sin 2\pi s x \cdot \sin 2\pi s x_i \cdot I(x_i) dx_i \\ &= a + m \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi s x \cdot \cos 2\pi s x_i \cdot I(x_i) dx_i + m \int_{-\infty}^{\infty} \sin 2\pi s x \cdot \sin 2\pi s x_i \cdot I(x_i) dx_i \quad (4) \end{aligned}$$

さらに

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi s x_i \cdot I(x_i) dx_i$$

(5)

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \sin 2\pi s x_i \cdot I(x_i) dx_i$$

と置けば、オイラーの公式より

$$\exp(-2\pi i s x_i) = \cos(2\pi s x_i) - i \sin(2\pi s x_i) \quad (6)$$

なので、 C, S は $I(x_i)$ のフーリエ変換のそれぞれ実部、虚部である。

(5)式より(4)式は

$$P(x) = a + mC \left(\cos 2\pi s x + \frac{S}{C} \sin 2\pi s x \right)$$

$\tan \varphi = \frac{S}{C}$ と置けば、さらに

$$P(x) = a + \frac{mC}{\cos \varphi} (\cos 2\pi s x \cdot \cos \varphi + \sin 2\pi s x \cdot \sin \varphi)$$

$$= a + \frac{mC}{\cos \varphi} \cos(2\pi s x - \varphi)$$

$$= a + mC \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} \cdot \cos(2\pi s x - \varphi)$$

よって

$$P(x) = a + m\sqrt{C^2 + S^2} \cdot \cos(2\pi s x - \varphi) \quad (7)$$

ただし

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{S}{C}$$

2. 正弦波格子像とコントラスト、そして MTF

上記(7)式より、正弦波格子 $O(x)$ の像 $P(x)$ は、やはり正弦波格子であり、その周波数は物体と同じであるが、振幅が元の $\sqrt{C^2 + S^2}$ 倍になり、位置が初期位相項 φ の影響分だけ横に移動している事が分かる(図 2)。

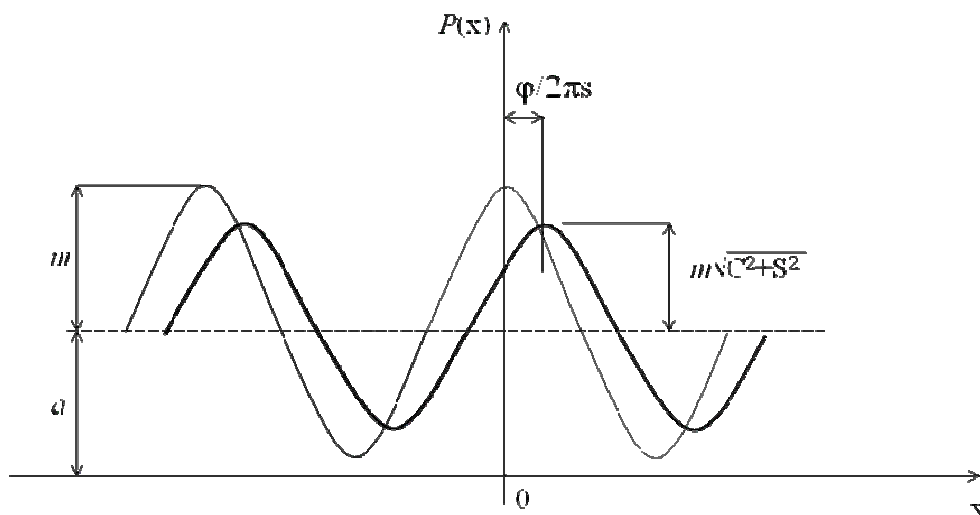


図-2 正弦波格子物体(細線)とその像(太線)。

元信号とのピークのずれ量、つまり $P(x)$ における原点から位相が 0 の位置までの距離は、 $2\pi s x - \varphi = 0$ より

$$x = \frac{\varphi}{2\pi s} \quad (8)$$

となる。明らかに、(5)(6)式から、 $I(x_i)$ のフーリエ変換を考えれば

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} I(x_i) \exp(-2\pi i s x_i) dx_i &= \int_{-\infty}^{\infty} I(x_i) \{ \cos(2\pi s x_i) - i \sin(2\pi s x_i) \} dx_i \\ &= C - iS \end{aligned}$$

となり、上式左辺は(3)式においての LSF の正規化を前提としているので、1次元における OTF の定義(連載前回(9)式参照)であり、従ってその絶対値 $\sqrt{C^2 + S^2}$ は MTF であり、 φ は PTF そのものである。

像の周期内の最大強度を I_{max} 、最小強度を I_{min} とすれば、結像のコントラスト(contrast) 或いはモジュレーション(Modulation)、 C_t は以下の様に定義される(図 3)。

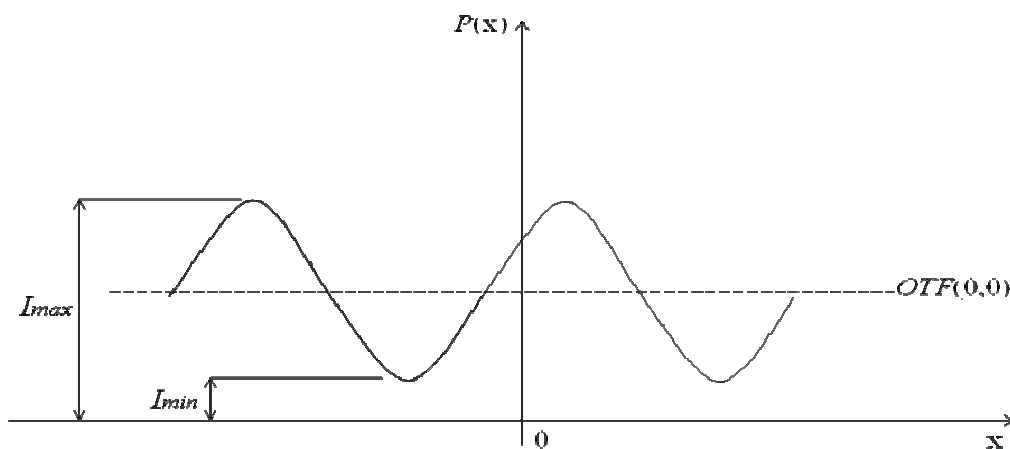


図-3 コントラストの定義

$$C_t = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (9)$$

この定義は、以下の如くに、バックグラウンドの平均的明るさと、像強度の振幅の比を表わしており

$$C_t = \frac{\frac{1}{2}(I_{max} - I_{min})}{I_{min} + \frac{1}{2}(I_{max} - I_{min})}$$

光量の絶対値に左右されず、結像の鮮明さを表わす。図2における正弦波物体と像におけるコントラストの比を(9)式から計算すると

$$\frac{C_t[P(x)]}{C_t[O(x)]} = \frac{m}{a} \sqrt{C^2 + S^2} \Big/ \frac{m}{a}$$

となり結果は MTF そのものを表す。

3 . 参考文献

- 1) 小瀬輝次: フーリエ結像論(共立出版社、東京、1979)
- 2) 草川 徹: レンズ設計者のための波面光学(東海大学出版、東京、1976)
- 3) 牛山善太、草川徹: シミュレーション光学(東海大学出版会、東京、2003)