提供：Optical Solutions
株式会社オプティカルソリューションズ
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-16-2（Fビル6階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/

光学設計ノーツ　２６（ver.1.0）

# OTF 計算における振動、位相とび等について考える

株式会社タイコ　牛山善太

今回は引き続き結像の評価の要となる OTF、MTF そして PTF について考える。ここではより具体的に、OTF の計算過程において一旦０になり、またレスポンスが現われたりする MTF の振動、そして（PTF の）位相飛び、偽解像等の通常レンズ設計時にはあまり問題視されないが、しかしちょっと気になる現象について解説させて戴きたい。

## 1.　MTF、PTF 計算の復習

本連載前回において正弦波像の結像の表現について記した。今回においては論理的に拠り所となる所であるから、要点を新たに整理し、復習すれば（導出の詳細は前回をご参照願いたい）、光学系の点像強度分布（以下 PSF）を I(x)とする時、

$$C=\int_{-\infty}^{\infty}\cos 2\pi s x_i\cdot I(x_i)dx_i$$
$$S=\int_{-\infty}^{\infty}\sin 2\pi s x_i\cdot I(x_i)dx_i \qquad (25\text{-}5)$$

と置くことによれば、(25-5)式より正弦波チャート像を表す畳み込み積分式

$$P(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\{a+m\cos 2\pi s(x-x_i)\}I(x_i)dx_i \qquad (25\text{-}2)$$

は以下の関数で表現できた。

$$P(x)=a+mC\left(\cos 2\pi sx+\frac{S}{C}\sin 2\pi sx\right) \qquad (1)$$

この段階ではフーリエ変換という概念は持ち込んでいない。ここでは正弦波の周波数を s、平均的バックグラウンドの明るさを $a$、正弦波格子の最大振幅を $m$ としている。さらに

$$\tan\varphi=\frac{S}{C} \qquad \left(つまり\quad \varphi=\tan^{-1}\frac{S}{C}\right) \qquad (2)$$

と置いて、(1)式は

$$P(x)=a+m\sqrt{C^2+S^2}\cdot\cos(2\pi sx-\varphi) \qquad (25\text{-}7)$$

と成ることが分かった。つまり、(25-5)で表されるC,Sが得られれば正弦波結像の状態は総て分かってしまう事になる。元の正弦波物体の表現は

$$O(x)=a+m\cos 2\pi sx \qquad (25\text{-}1)$$

であるので、正弦波物体と像の最大振幅比は$\sqrt{C^2+S^2}$であり(MTF)、位相差はφ(PTF)で直接表される事がわかる。(25-5)式における二つの関数はオイラーの公式より

$$\exp(-2\pi isx_i)=\cos(2\pi sx_i)-i\sin(2\pi sx_i) \qquad (25\text{-}6)$$

としてまとめて考えた複素座標空間上の関数の積分の実数部、虚数部として表現する事が出来る。MTF はこの複素空間における積分結果の複素数の大きさであり、PTF は方位である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(x_i)dx_i=1 \qquad (3)$$

とエネルギーを正規化しているなら OTF の定義(第 24 回 9 式)から一次元で考えて

$$OTF(s)=\int_{-\infty}^{\infty} I(x_i)\exp(-2\pi isx_i)dx_i$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} I(x_i)\{\cos(2\pi sx_i)-i\sin(2\pi sx_i)\}dx_i$$

$$=C-iS \qquad (4)$$

であり、さらに

$$OTF(s)=\sqrt{C^2+S^2}\cdot\exp\{i\varphi\} \qquad (5)$$

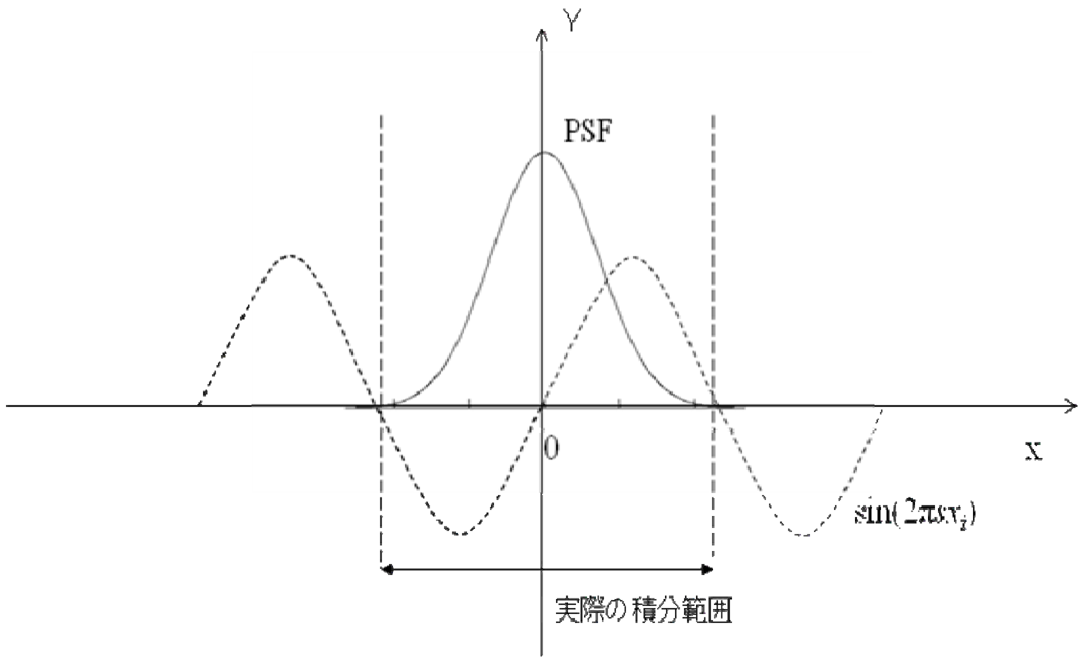
或いは

$$OTF(s)=MTF(s)\cdot\exp\{iPTF(s)\} \qquad (6)$$

とも表現できる。

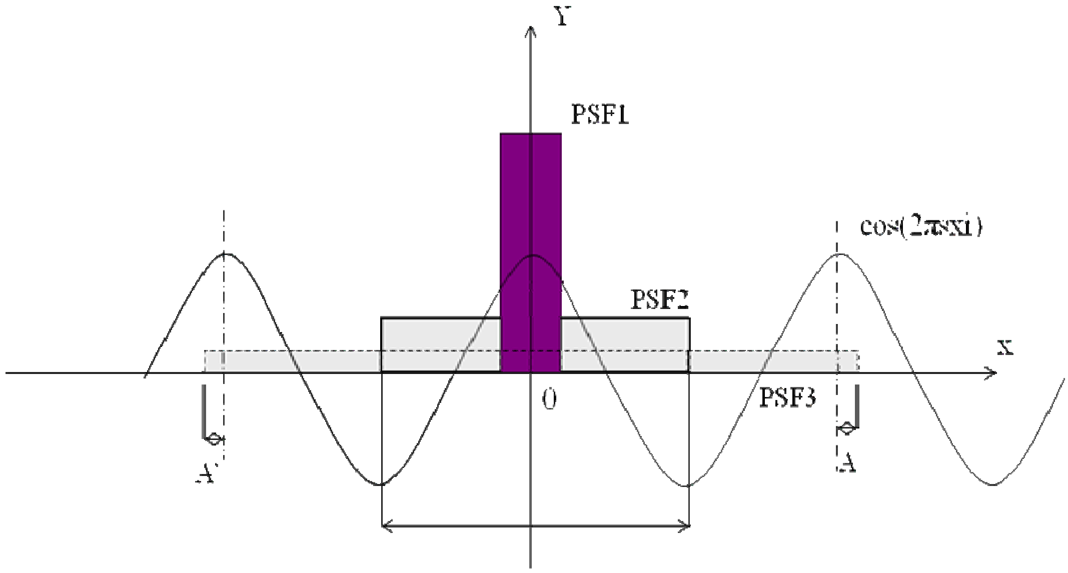
## 2.　MTF 計算結果における振動について

ここで、PSF 中心を像面座標の原点と於いて考えてみよう。(2)式より S=0 の時のみ PTF は0とπの整数倍となる。Sin は奇関数であるので、I(x)が遇関数であればそれらの積の積分は必ず0となり(2)式より PTF の値は 0 もしくは整数πとなる。観測する断面内において線対称的な PSF に対して位相、PTF は0かπの整数倍の不連続な値しかを持たない(図 1)。非対称な PSF の時のみ S が値を持ち PTF がその他の中間の連続的値を採り得る。




図ー1　sin関数と対称型PSFとの積の関数の積分を考える

ここで、簡潔のために対称形の PSF を考えれば、S 成分は無視できる訳であるから C についてのみの OTF、MTF の影響について考えれば良い事になる。また、PSF をさらに簡便のため図 2 の様な矩形関数と置けば、任意の周波数を持つ正弦波に対応する C は図 2 の様な関数の積関数の積分となる。




図－2　正弦波と点像強度分布(PSF)の積

ここには 3 種類の PSF が描かれていて(3)式の通り、それぞれ面積は 1 である。PSF1 と正弦波との積の関数は積分に際し中央部分だけ残る事になり確かにはっきりとした値を持つ。これが一般的に有効なMTF計算値の基と成る。そしてPSFの範囲が可也広がった場合の（所謂ボケた場合の）PSF2を考えると、もし図の通り PSF2 が正弦波の 1 周期分と等しい幅を持つとすれば、2 関数の積の積分は0となってしまう。確かに物体構造の細かさと、PSF2の大きさを比べると直感的にも解像するのは難しそうだと言う事が感じられる。ところが、更に極端に広がった PSF3 を考えると、正弦波周期の整数倍の長さとの差の分、A+A'の範囲において C は値を持つことが分かる。勿論、さらにボケている分だけ PSF のy方向の値は小さくなり、微小な寄与しかしないが、C、そして MTF 等にレスポンスを齎す。

MTF 計算において、一旦値が0に成りながら、さらに高周波の領域で値が復活したりして振動し減衰していくのはこの様な理屈による(図-3)。そして（25－7）式により、この様な注目する被写体構造に比べてかなり大きなボケを持つＰＳＦによって齎されるＣの値が微々たるものとはいえ再生像の最大振幅、そしてＭＴＦに何らかの影響を与える事は明らかである。

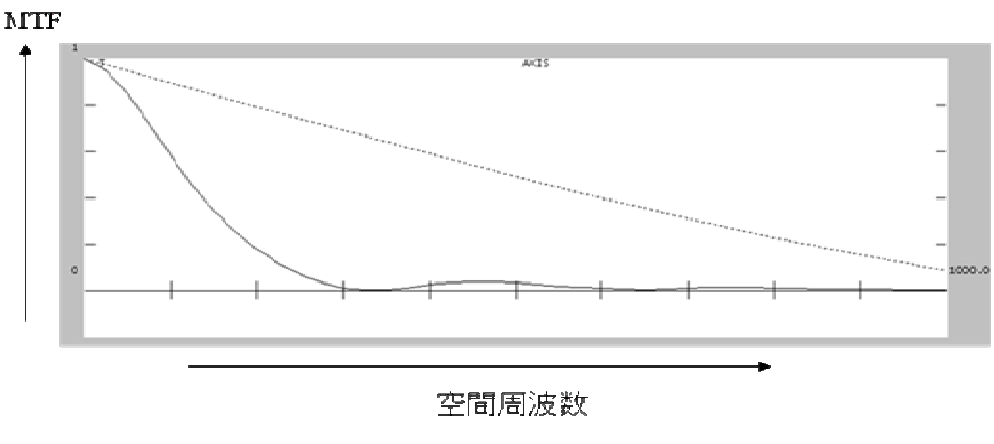
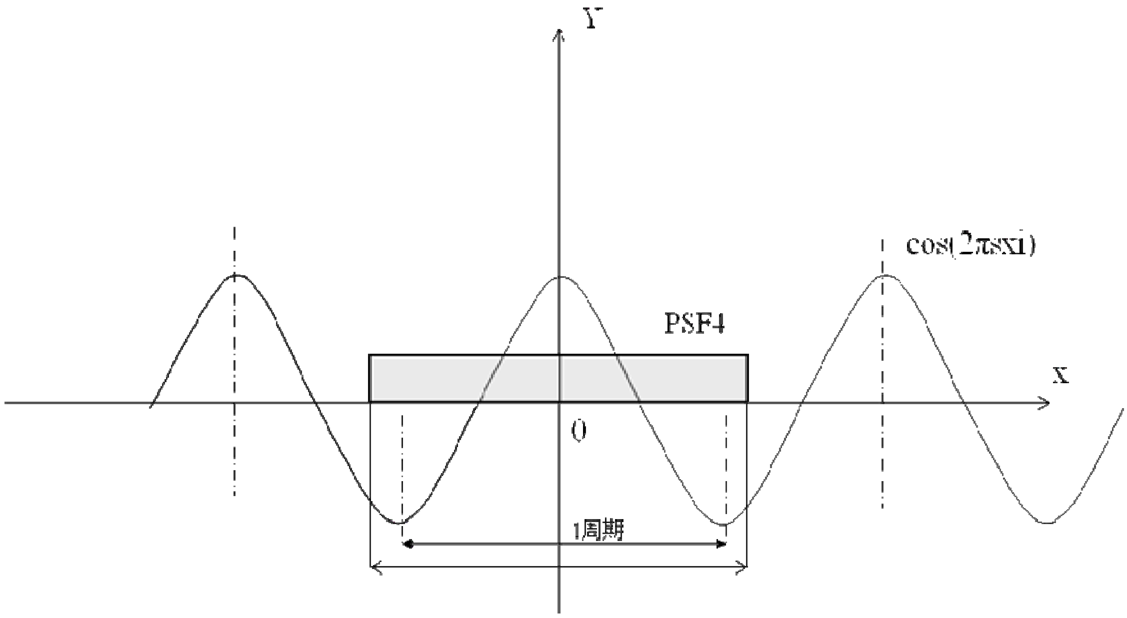



図-3　振動しながら減衰するMTF（図-2のPSFのものとは異なる、実際のレンズデータより）

## ３． 所謂、偽解像と呼ばれる現象

さてここで、図 4 にある様な PSF4 を考える。




図ー4　　OTF計算において負の値となる点像強度分布

この PSF は上述の通り C=0 となる PSF2
が更に若干ボケて広がったものである。明らかに積分領域は正弦波振幅の負の領域に達しており、S は0であるから、(4)式より OTF(s)は実数の負の値をとる。この OTF は(5),(6)式で等価に表現できる訳であるから、MTF は常に正であるので、exp($i\varphi$)は-1 と成らねばならない。つまりφ＝$k$π（$k$は奇数）である。

$$OTF = C^2 \exp(i\varphi) < 0$$

ただし

$$\tan\varphi = \frac{0}{C} = 0$$

である。

結局、sが高周波数に成るに連れて PSF2 と cos(2πs)の関係が実現されるところで MTF は0になる。ところが PSF4 の様に再び C が値を持ち始めたときには位相がπの奇数倍だけ飛んでいる事になる。再現される正弦波像の初期位相が実質πだけずれる事になる。これは本来なら正弦波像の明るくなる場所と暗くなる場所がちょうど半波長ずれる事により、入れ替わってしまう事を意味する。明暗が反転してしまうので、これを“偽解像”と呼ぶ場合もある。ただ、正弦波像の位相がズレただけなのであるから、（しかも後述の様に、また元に戻る）ちょっと大げさすぎる呼び名である感は否めない。

またさらにPSF3の様なC=0となる関係を過ぎOTFが正の状態に戻れば、また新たに位相がπずれることになる。ただこの場合は 2$k$πとなるので明暗は元に戻る。

## ４． 非対称性収差と PTF

ここまで、簡単に考えるため対称型の PSF を考えたが、一般的な共軸光学系においては PSF･点像強度分布はﾒﾘﾃﾞｨｵﾅﾙ方向については非対称性を持っている。この非対称性が大きくなるとき PTF は無視できない大きさの、0もしくはπの整数倍以外の連続的な値となる。それではどのような時に点像強度分布の対称性が大きく損なわれるのであろうか？それは明らかに 3 次収差論的に表現すれば大きなコマ収差、倍率の色収差などが存在よる場合が考えられよう。(またPTFは点像強度分布の非対称性、単波長、或いは色収差が良好に補正されている場合に特にコマ収差の程度を表わす指標と考える事も出来る。)

この非対称性の顕著さも、対象となる正弦波の周波数により変化する事は当然である。sより遥かに大きな周波数領域での非対称性(つまり細かい非対称性)では全体での積分にはあまり寄与しないであろう。相対的に低周波数領域における非対称性が重要なのである。したがって相対的に正弦波物体の周波数が高い領域において PTF は顕著な値を持ちやすい。

PTF の画像への影響はさらに詳しく参考文献4)において触れた。また、本連載においても取り上げさせていただく予定である。

## ５． 参考文献

1) 小瀬輝次：フーリエ結像論 (共立出版社、東京、1979)
2) 草川 徹：レンズ設計者のための波面光学 (東海大学出版、東京、1976)
3) 早水良定：光機器の光学(日本オプトメカトロニクス協会,1995)
4) 牛山善太、草川徹：シミュレーション光学 (東海大学出版会、東京、2003)