

結像光学系によるフラウンホーファー回折像

株式会社タイコ 牛山善太

波長 0.0005mm を想定して、レイリーの距離を用いれば、その値は、小さい領域で例えばスリットが 0.001mm 角、つまり $D=0.001\text{mm}$ という回折格子のオーダーで $Z=0.002\text{mm}$ となり、 $D=0.01\text{mm}$ という大き目の粒子のオーダーでは、 0.2mm となる。この様な領域で観察される回折は通常、フラウンホーファー回折領域のものであることが前回 (本連載第 27 回) の議論からも分かる。ところが、比較的大きな開口を考えると、例えば $D=1$ の場合、 $z=2000\text{mm}$ となる。つまり 2m である。これはかなり長い距離であるが、 $D=5\text{mm}$ のさらに大きい開口を考えれば、限界は $Z=50\text{m}$ というとんでもない距離になる。大きな開口によるフラウンホーファー回折像の観察は通常の実験室では不可能であるということになる。しかしこの困難をレンズを用いて乗り切ることが出来る。ここでは、少し詳しくこのレンズの作用について考えてみよう。当然、光学設計を前提にする場合には波動光学中でも重要な検討である。

1. レンズの機能と回折像について

ここで、光学レンズの結像作用における機能について考えさせて頂く。波面的には、図 1 にある様に点光源の幾何光学的に無収差の結像を光学系が齎している場合には、物界における点光源から生じる球面波を、像界において一点を中心とする収束球面波に変換する機能をレンズは果たしていると考えられる。(今回は軸上結像について考える。)

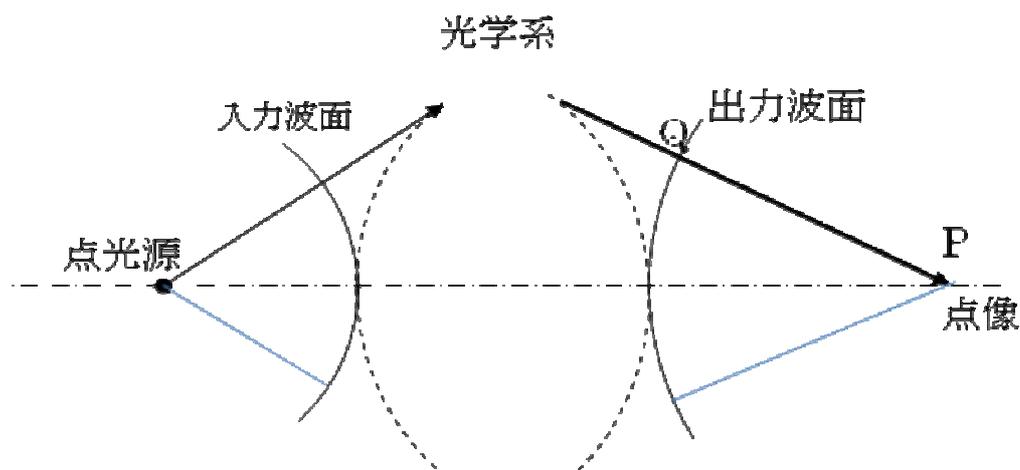


図1 レンズの波面変換作用

そこで、前回(連載第 27 回)の発散球面波上ではなく、一点に収束する球面波上での 2 次波源の影響の任意の観測点 P における重ね合わせによる、フレネル-キルヒホッフの回折積分式の適用について考えてみる。

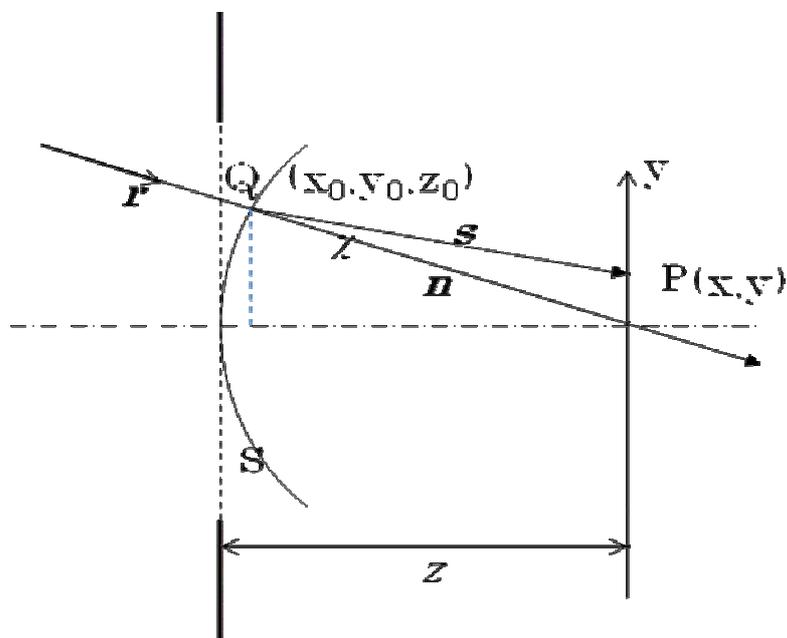


図2 結像におけるキルヒホッフ回折積分式の開口部の考え方

図 2 の様に考える。諸元については前回の図 1 のものと同じである。するとこの場合にも、波面法線ベクトル n と入射光線ベクトル r との角度は 0 と看做せて

$$U(P) = \frac{-iA \exp(ikr)}{2\lambda r} \iint_{\sigma} \left\{ \frac{\exp(iks)}{s} (1 + \cos \chi) \right\} d\sigma \quad (1)$$

となる。さらに、波面中心近傍の検討を行うとすれば、前回とまったく同様に考えて、波面法線ベクトル n と射出光線ベクトル s との関係において $\cos \chi = 1$ と出来、波面上の積分範囲の形状も含めた、振幅分布、位相分布を表す、所謂、瞳関数、

$$g(x_0, y_0) = A \frac{\exp(ikr)}{r} \quad (2)$$

を導入して、(1)式をスリット面上 (x_0 - y_0 系)、スクリーン上 (x - y 系) の z 軸を共通とする二つの直交座標系上に書き換えると、さらに(1)式は

$$U(x, y) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \frac{\exp\{iks\}}{s} dx_0 dy_0 \quad (3)$$

となる。

ここで、(3)式中における、距離 s について解けば、図 2 より明らかな様に、また、連載前回と同様に、

$$s = \sqrt{(z - z_0)^2 + (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \quad (4)$$

となる。連載前回においては観測距離 z が瞳孔 D と比較して十分大きな場合の回折現象を扱うために z_0 の大きさを無視したが、今回は F ナンバーの明るい結像系による回折像の扱いを可能とするためにもこの値は無視できない。その様に考えて、さらに図 2 より

$$(z - z_0)^2 = z^2 - x_0^2 - y_0^2$$

であるので、

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{z^2 - x_0^2 - y_0^2 + (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \quad (5) \\ &= \sqrt{z^2 - 2x_0x - 2y_0y + x^2 + y^2} \\ &= z \left(1 + \frac{-2x_0x - 2y_0y + x^2 + y^2}{z^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となる。ここで、右辺括弧内第 2 項の 2 次の項までで近似展開すれば

$$\begin{aligned} s &= z + \frac{-2x_0x - 2y_0y + x^2 + y^2}{2z} - \frac{(-2x_0x - 2y_0y + x^2 + y^2)^2}{8z^3} \\ &= z + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{x_0x + y_0y}{z} - \frac{(-2x_0x - 2y_0y + x^2 + y^2)^2}{8z^3} \quad (6) \end{aligned}$$

となる。ここで、右辺第 4 項 (T4) を取り上げて考えると、

$$\begin{aligned} T_4 &= -\frac{(-2x_0x - 2y_0y + x^2 + y^2)^2}{8z^3} \\ &= -\frac{\{x(x - 2x_0) + y(y - 2y_0)\}^2}{8z^3} \end{aligned}$$

$$= -\frac{x^2(x-2x_0)^2}{8z^3} - \frac{y^2(y-2y_0)^2}{8z^3} - \frac{xy(x-2x_0)(y-2y_0)}{4z^3} \quad (7)$$

x 、 y が双方同程度の値になる時には、この(7)式右辺の3つの項はそれぞれ、同程度の次数の誤差を表していると考えられる。従って第一項を代表にして誤差の程度について考えれば、 x_0 が z と比べて同程度に大きく、 $x_0 \gg x$ である時が誤差の大きい場合であるから、誤差の検証としては、

$$\begin{aligned} \Delta &\cong \frac{x^2(-2x_0)^2}{8z^3} \\ &= \frac{x^2 x_0^2}{2z^3} \\ &= \frac{x^2 \left(\frac{x_0}{z}\right)^2}{2z} \end{aligned} \quad (8)$$

と考えることが出来よう。

ここで、焦点距離 $f = z$ と置いて、光学系の F ナンバーを考えると

$$F = \frac{z}{2x_0} \quad (9)$$

であるから(8)式は

$$\Delta = \frac{x^2}{2z} \left(\frac{1}{4F^2} \right) \quad (10)$$

例えば、 z に比べ x_0 に有効な大きさを考え、F ナンバーを 0.7 とし、 $z=5\text{mm}$ 、とする。そして $\lambda=0.0006\text{mm}$ とした場合の、フラウンホーファー回折像のエアリーディスク半径 $6)P138$ の倍の距離を x と置けば、

$$x = 2\omega = 1.22\lambda F \times 2 \approx 0.001025\text{mm}$$

となり、これらの値を用いて(10)式を計算すると

$$\Delta = \frac{x^2}{8z} \left(\frac{1}{F^2} \right) \approx 5.4 \times 10^{-8} \quad (11)$$

となり T4 は十分小さな検証範囲で計算を適用する限り、無視できると考えられよう。(ただし、仮に検証距離が 15/100mm を超えるとすると誤差は波長の数%に達する。)

さて、T4 項を無視した上で(6)式を(3)式に代入し、(3)式積分内で敏感な影響を与えない exp 外の s を z ととして積分の外に出すと、

$$U(x, y) = -\frac{i}{z\lambda} \exp\left\{ik\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)\right\} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \exp\left\{-ik\left(\frac{x_0x + y_0y}{z}\right)\right\} dx_0 dy_0 \quad (12)$$

が得られる。これは前回に求めたフラウンホーファー回折近似式そのものである。無収差の光学系によりフラウンホーファー回折像が得られることが分かる。と言うことは前回におけるような空間周波数領域における変数の取り方を変えれば、

$$v_x = \frac{x}{z\lambda} \quad , \quad v_y = \frac{y}{z\lambda} \quad -(13)$$

レンズによる軸上点光源の無収差回折像は一般的に言って、以下の如くに瞳関数のフーリエ変換で得られることになる。

$$U(v_x, v_y) = \frac{-i}{z\lambda} \exp\left\{ik\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)\right\} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \exp\{-i2\pi(x_0v_x + y_0v_y)\} dx_0 dy_0 \quad (14)$$

2. 参考文献

- 1) M.Born & E.Wolf: 光学の原理、第7版 / 草川徹訳 (東海大学出版会, 2005)
- 2) 辻内順平: 光学概論 (朝倉書店、東京、1979)
- 3) 鶴田匡夫: 応用光学 (培風館、東京、1990)
- 4) 谷田貝豊彦: 光とフーリエ変換 (朝倉書店、東京、1992)
- 5) J.W.Goodman: Introduction to Fourier Optics 2nd.edi.
(McGraw-Hill, NewYork, 1996)
- 6) 牛山善太: 波動光学エンジニアリングの基礎 (オプトロニクス社、東京、2005)