提供：Optical Solutions
株式会社オプティカルソリューションズ
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-16-2（Fビル6階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/

光学設計ノーツ　３０（ver.1.0）

幾何光学的 OTF について

株式会社タイコ
牛山善太

本連載において何回か OTF,MTF について触れさせて頂いてきたが、ここでは幾何光学的近似の下での OTF についての基本的な内容について触れさせていただこう。その適用に際しては様々な限界は勿論あるものの、幾何光学的近似による計算の簡便性だけでなく、瞳収差の影響を受けない、直ちに光軸に直交する平面上で総ての像高での計算を出来るなど、計算経済性の面においては非常に優れた面を持っている。現在でも光学設計において最も重要な総合的評価手法の一つである。

1.　スポットダイヤグラム、幾何光学的強度の法則による OTF の計算

幾何光学的にしろ、波動光学的にしろ何れかの手段で像面上の点像強度分布 $I(x,y)$ が得られれば（5）式によりOTFを計算することができる。ここでは、本書においてここまでにたびたび取り扱ってきたスポットダイヤグラムを用いて、最も多く光学設計において用いられているであろう、所謂幾何光学的 OTF、$OTF_G(s,t)$を算出する方法について考えよう。

ここで光学系の瞳の面積を A として、瞳上の単位面積を通過するエネルギーを均一に1とすれば、光学系を透過する全光量は A であり、スポットダイヤグラムより得られる強度分布（像面単位面積あたりに到達するエネルギー）を $I_p(x,y)$ なる関数で表すとすれば、本連載24回（9）式より

$$OTF_G(s,t)=\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_p(x,y)\exp\{-2\pi i(sx+ty)\}dxdy \tag{1}$$

である。ここで、瞳上座標（u, υ）を導入し、瞳上の微小面積 dS_p が像面上の微小面積 dS_i に投影される（瞳面上の面積 dS_p の微小なパッチを通過した光線が、像面上でやはり微小な面積 dS_i のパッチを形成する）とすれば(図 1)、瞳上の単位面積を通過するエネルギーは1であるので、対応する瞳上と像面におけるパッチの間で幾何光学的な強度の法則[3) P15]、

$$I_p dS_i = 1\times dS_p \tag{2}$$

が成り立つ。

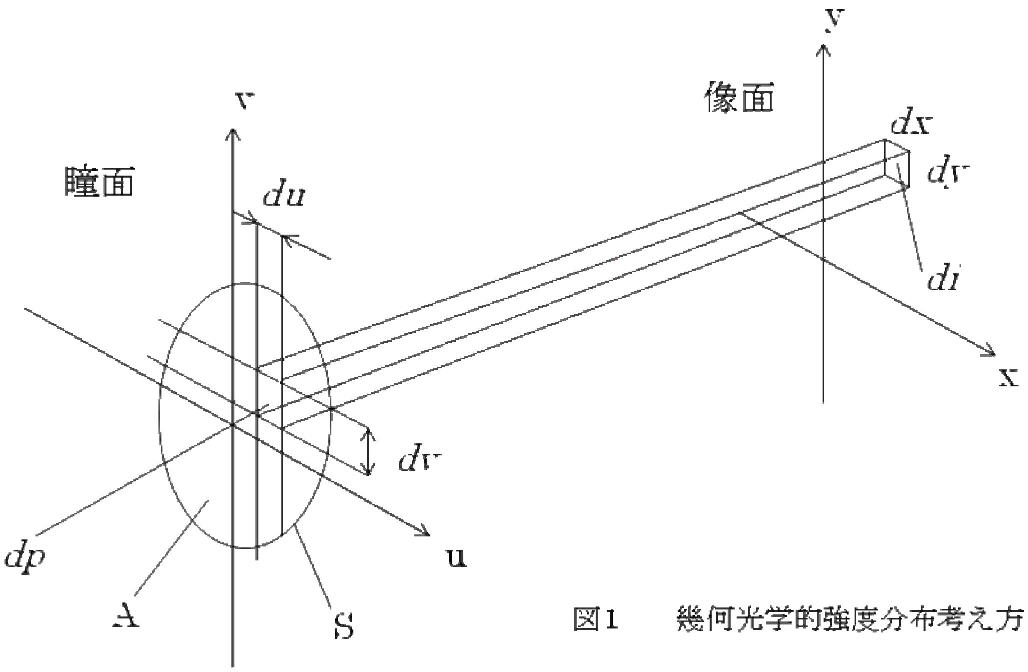

図1　　幾何光学的強度分布考え方

この関係より

$$I_{\mathrm{p}}(x,y)=dS_p/\,dS_i \quad 、\quad dS_p=du\,d\upsilon \quad 、\quad dS_i=dxdy$$

とすることができる。

保存則である(2)式の両辺における面積 dS_i、dS_p の間にはエネルギーの分岐、吸収等を考えなければ、光学系が存在しても構わない。従って、ここでの瞳面とは任意の位置に置いても(2)式は成り立つことになる。一般的には光学系第一面の直前に仮想の入射平面を置き、この面をここでの入射瞳面にあたる面とする場合が多い。物体と入射面の間に光学系が存在しないので、均等な強度分布は均等な面分割パッチを狙い光線を発射させることにより簡単に表現できる(NA が大きいときには注意を要するが)。

さて、これらの関係を(1)式に代入すれば、

$$OTF_G(s,t)=\frac{1}{A}\int\int_S \exp\left[-2\pi i\left\{s\cdot x(u,\upsilon)+t\cdot y(u,\upsilon)\right\}\right]du\,d\upsilon \qquad (3)$$

である。積分は入射面上(仮想の入射瞳)で行われれば良い。u、υ はこの瞳上のみにおいて定義されるわけであるから、(3)式の積分範囲 S は瞳の形状を表わしている。また、像面上の光線到達点の座標(x, y)は、物点位置が定まれば、光線の瞳通過座標のみにより決まるので、(3)式において x、y をそれぞれ u、υ の関数として表わした。

ここで、瞳面を N 個の等面積の矩形に分割して、j番目の格子の頂点を通過する光線の像面到着座標を (x_j, y_j) とし、$A=Ndudy$ とおいて(3)式の積分をΣを用いて離散的に表わすと

$$OTF_G(s,t) = \frac{1}{Ndud\upsilon} \lim_{du,d\upsilon \to 0} \sum_{j=1}^{N} \exp\{-2\pi i(sx_j + ty_j)\} dud\upsilon \tag{4}$$

よって

$$OTF_G(s,t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \exp\{-2\pi i(sx_j + ty_j)\} \tag{5}$$

この(5)式を基にして幾何光学的 OTF を計算することができる。

さらに、オイラーの公式より、(5)式におけるcos成分、sin 成分を別々に表わせば

$$\begin{aligned} R_C &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \cos\{2\pi(sx_j + ty_j)\} \\ R_S &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sin\{2\pi(sx_j + ty_j)\} \end{aligned} \tag{6}$$

この時

$$OTF_G = R_C - iR_S \tag{7}$$

であり、絶対値である MTF は

$$MTF = \sqrt{R_C{}^2 + R_S{}^2} \tag{8}$$

PTF は

$$PTF = \tan^{-1} \frac{R_S}{R_C} \tag{9}$$

図 2 に 2 次元的に示す通り、$(s、t)$で表わされる様々な方位に対する MTF を計算する事ができる。

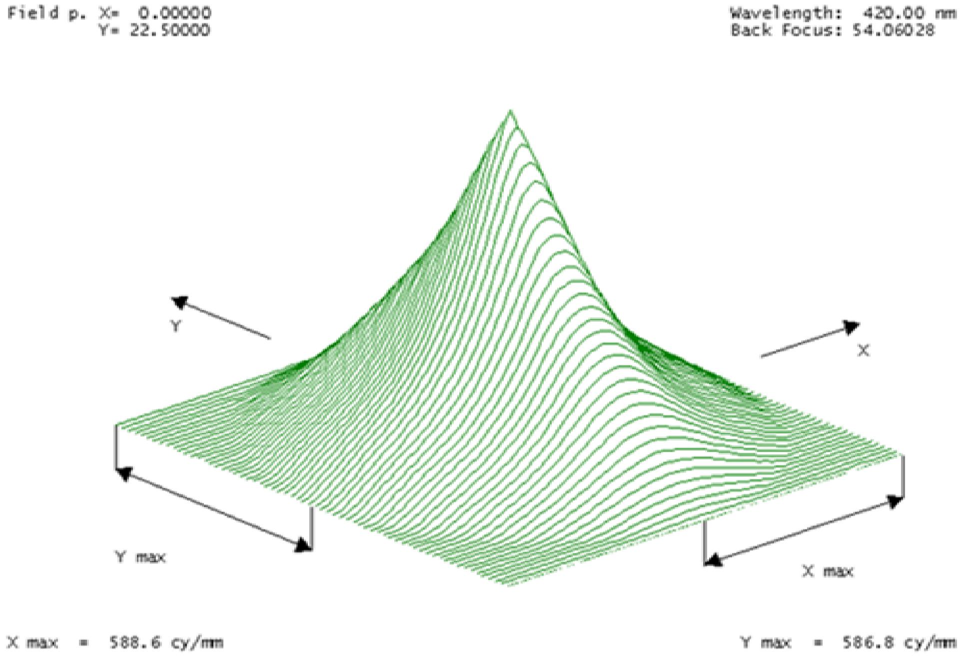

図２　MTF－空間周波数　２次元図　（Kidger Optics、Sigma 2100による）

また、多くの場合 MTF は互いに直交するサジタル方向、タンジェンシャル（メリディオナル）方向それぞれにおいて単独で計算されるので、例えばタンジェンシャル方向のみ考えれば、(6) 式は

$$R_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\cos\left(2\pi t y_j\right) \quad 、 \quad R_S = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(2\pi t y_j\right) \qquad (10)$$

とすることができる。サジタル方向についても同様にして結果が得られる訳であるが、回転対称性を持った一般的な光学系の場合、サジタル方向においては強度分布には線対称性が存在するので、スペクトルの sin 成分は存在しない。このことは sin 波そのものが原点における線対称性を持たないことからも理解できる。よって、この様な場合のサジタル方向についてのＭＴＦは

$$MTF_S = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\cos\left(2\pi s x_j\right) \qquad (11)$$

とすることができる。

この様に計算された実際のﾚﾝｽﾞのs、t方向の1次元的 MTF 図を図 3 に示す。

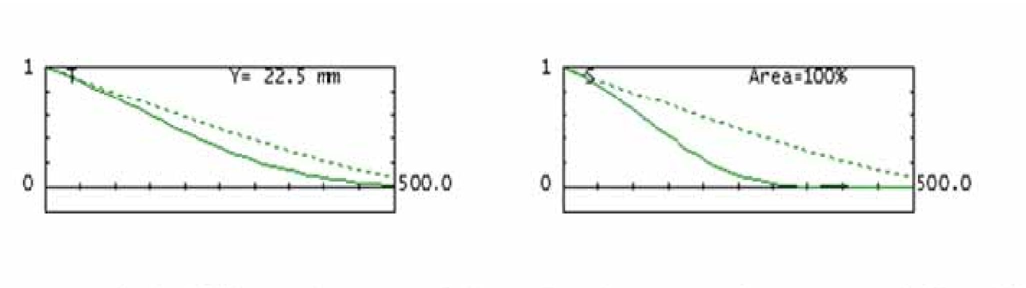

図3　　MTF−空間周波数　１次元図　　点線は回折を考慮した場合のMTFの理想的最高値を表わす。
左はメリディオナル方向、右はサジタル方向に対するもの。

2．スポットダイヤグラムをδ関数の塊と考えた場合の幾何光学的 OTF の計算

幾何光学的な光線追跡による点像の強度分布 PSF を $I(x,y)$と表せば、その分布はスポット・ダイヤグラム分布における像面上光線到達点を表すδ関数の塊として表現することができる。$I(x,y)$は、光線本数分のデルタ関数の集合として

$$I(x,y)=\sum_{j=1}^{N}\delta(x-x_j)\delta(y-y_j) \qquad (12)$$

である。xと x_j、yと y_j が一致した場合にのみ、そこに積分値が１たる、δ関数が存在することになる。ここでは、N は有効光線の総数を表し、(x_j, y_j)は像面上のそれぞれの光線の交点座標を表す。

さて、OTF は点像強度分布 PSF のフーリエ変換として表されるので、簡潔のため、全光束（エネルギー）を１として考えれば、上式も考慮して、

$$OTF(s,t)=\iint_{-\infty}^{\infty} I(x,y)\exp[-2\pi i(sx+ty)]dxdy$$

$$=\iint_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}\delta(x-x_j)\delta(y-y_j)\exp[-2\pi i(sx+ty)]dxdy \qquad (13)$$

ところで、点（x_0, y_0）において関数 $f(x,y)$が、デルタ関数との積の形でサンプリングされる場合、以下の関係がデルタ関数の定義から成立する 4)P50,5)P53。

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)dxdy = f(x_0,y_0) \qquad (14)$$

よって(13)式は、

$$OTF(s,t)=\sum_{j=1}^{N}\exp\left[-2\pi i\left(sx_j+ty_j\right)\right] \tag{15}$$

s,t はそれぞれ、サジタル方向、メリディオナル方向の空間周波数である。ここで、全光束を1と正規化せず、光線一本一本の表すエネルギーを等しく1と置き、全光線で光学系への全光束を表すとすれば、I(x,y)の全像面における積分値は総光線本数Nとなり、(15)式は

$$OTF(s,t)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\exp\left[-2\pi i\left(sx_j+ty_j\right)\right] \tag{16}$$

と成り、（5）式と一致する。

３． 参考文献

1) **小瀬輝次：フーリエ結像論（共立出版社、東京、1979）**
2) **草川　徹：レンズ設計者のための波面光学（東海大学出版、東京、1976）**
3) **牛山善太、草川徹：シミュレーション光学（東海大学出版会、東京、2003）**
4) **井町昌弘、内田伏一：フーリエ解析（裳華房、東京、2001）**
5) J.Gaskill：Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics (JOHN WILEY & SONS,New York, 1978)