提供：
Optical Solutions
株式会社オプティカルソリューションズ
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-16-2（F ビル 6 階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/
e-mail:info@osc-japan.com

光学設計ノーツ　３３（ver.1.0）

部分的コヒーレント結像の考え方　3

ファン・シッターーツェルニケの定理

株式会社タイコ
牛山善太

点光源を仮定すれば、コヒーレンスの問題は時間的コヒーレンスに集約される。この場合、前節で取り上げげた、光源の周波数分布特性 $E(\nu)$が複素コヒーレンス度 μ_{12}に影響を及ぼす。また、電球のフィラメントの様に、光源がそれぞれ、タイミング的にばらばらに光波を発する微小光源により成り立ち、インコヒーレントな面積を持つ時、この様な光源の広がりも、μ_{12}に影響を及ぼす。この影響は空間的コヒーレンスと呼ばれる。ここでは光源の強度分布とそれによる被照明面（２次光源、或いは照明されている被写体と考えても良い）におけるコヒーレンシーの関係について解説させていただきたい。

１．ファン・シッターーツェルニケの定理

ここからは、この空間的コヒーレンスを取り扱うために、時間的コヒーレンスの良い光源を仮定しよう。つまり、準単色光源の集合により光源面が形成されているとする。M個の微小光源（点光源）の集合と考えられる、準多色光源の中心各周波数を ω_0、とする時、図 1 にある様に、光源面上の点 S_mから放射される光波による受光面上の点 Q_1'（照明されている、被写体、2 次光源[1]と考えることも出来る。）における、時刻 tでの複素振幅は、これら２点間の距離を L_{1m}として、球面波の進行を考え、

$$V\left(Q_1'\right) = A_m \exp\left\{i\left(\omega_0 t - \varphi_m + kL_{1m}\right)\right\} / L_{1m} \qquad -（1）$$

と出来る。A_m、ψ_mは S_mにおける、それぞれ単位面積当たりの最大振幅、初期位相を表す。

[1] ここでの被照明面を新しい光源面とすれば、この面上での２点のコヒレーンスを考えることは本連載 31 回の図 1 に於けるように、２次光源のさらに後に存在する像面上の強度分布を考えることに直結する。

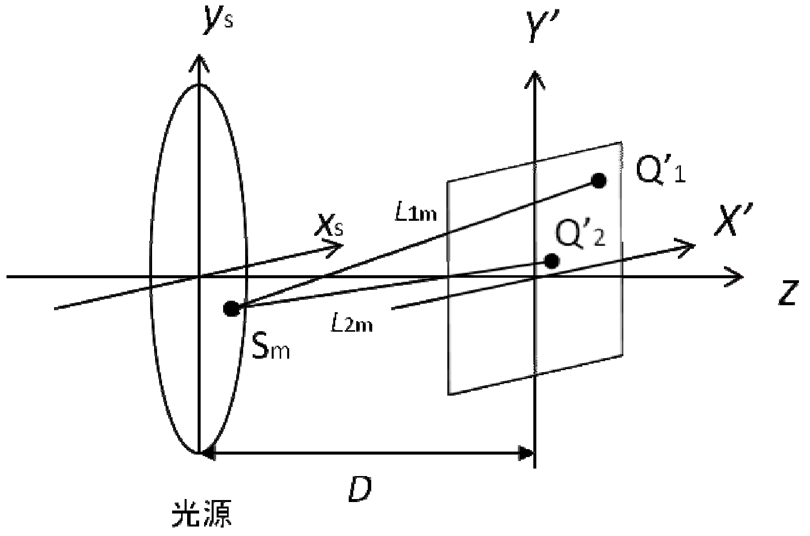

図１　　物体面上におけるコヒーレンシー

kは ω_0 を考えた場合の波数である。同様に考えて、光源の各点光源から影響を受ける、受光面上の点 Q'$_1$、Q'$_2$における複素振幅は、m=１，２,・・・・・Mとして、

$$V_1(t)=\sum_{m=1}^{M} A_m \exp\{i(\omega_0 t-\varphi_m+kL_{1m})\}/L_{1m}$$

―（2）

$$V_2(t)=\sum_{m=1}^{M} A_m \exp\{i(\omega_0 t-\varphi_m+kL_{2m})\}/L_{2m}$$

となる[2]。受光面上のコヒーレンシーを考えるために、本連載 32 回(9)(10)式における準単色光源の場合の相互強度（31 回(5)式参照)、

$$\Gamma_{12}(0)=J_{12}(=J(Q_1',Q_2'))=\langle V_1(t)\cdot V_2^{*}(t)\rangle \qquad ―（3）$$

を計算すれば、Q$_2$'におけるmを nと表記しなおして、

[2] Q'$_1$点において+kL1m の分だけ、波の進行に伴い遅れて Sm 上の位相が到達する。

$$J_{12}\left(Q_1{}',Q_2{}'\right)=\left\langle \sum_{m,n=1}^{M} A_m A_n{}^* \frac{\exp\{-i(\varphi_m-\varphi_n)\}\exp\{ik(L_{1m}-L_{2n})\}}{L_{1m}L_{2n}} \right\rangle \quad -（4）$$

と出来る。ところが、空間的にインコヒーレントな光源を考えているので、(4)式における時間平均を考えると、特定の点光源からの光波は他の点光源からの光波とは、位相の関係を一定に保てなくなるので$m \neq n$の場合の項は消え、(4)式は以下の通りになる。

$$J_{12}\left(Q_1{}',Q_2{}'\right)=\sum_{m=n=1}^{M} \left\langle A_m A_m{}^* \right\rangle \frac{\exp\{ik(L_{1m}-L_{2m})\}}{L_{1m}L_{2m}} \quad -（5）$$

従って、最大振幅の絶対値の 2 乗の時間平均を強度として（後述(9)(10)式における正規化も踏まえて)、

$$J_{12}\left(Q_1{}',Q_2{}'\right)=\sum_{m=n=1}^{M} I_m \frac{\exp\{ik(L_{1m}-L_{2m})\}}{L_{1m}L_{2m}} \quad -（6）$$

と、表せる。ここで離散的なこの式を連続的に拡張する。光源の微小面積をds、光源の座標 S に依存する強度分布をI（S）とし、やはり S についての関数として、L_{1m}、L_{2m}を単にL_1、L_2と置いて、

$$J_{12}\left(Q_1{}',Q_2{}'\right)=\int_S I(S)\frac{\exp\{ik(L_1-L_2)\}}{L_1L_2}dS \quad -（7）$$

と出来る。また、

$$J_{11}\left(Q_1{}'\right)=I(Q_1')=\int_S \frac{I(S)}{L_1{}^2}dS \quad 、J_{22}\left(Q_2{}'\right)=I(Q_2')=\int_S \frac{I(S)}{L_2{}^2}dS \quad -（8）$$

となる。さらに、(7)、（8）式、そして本連載３２回(11)式、

$$\mu_{12}=\frac{J_{12}}{\sqrt{J_{11}J_{22}}} \qquad （32－11）$$

より

$$\mu_{12} = \frac{1}{\sqrt{I(Q_1')I(Q_2')}} \int_S I(S) \frac{\exp\{ik(L_1 - L_2)\}}{L_1 L_2} dS \qquad -（9）$$

である。さらに光源の積分範囲を微小と考えれば、(7),(8)式分母の L_1、L_2 の 2 乗のオーダーの項は一定として積分外に出すことが出来、

$$\mu_{12} = \frac{\int_S I(S) \exp\{ik(L_1 - L_2)\} dS}{\int_S I(S) dS} \qquad -（10）$$

とすることも出来る。

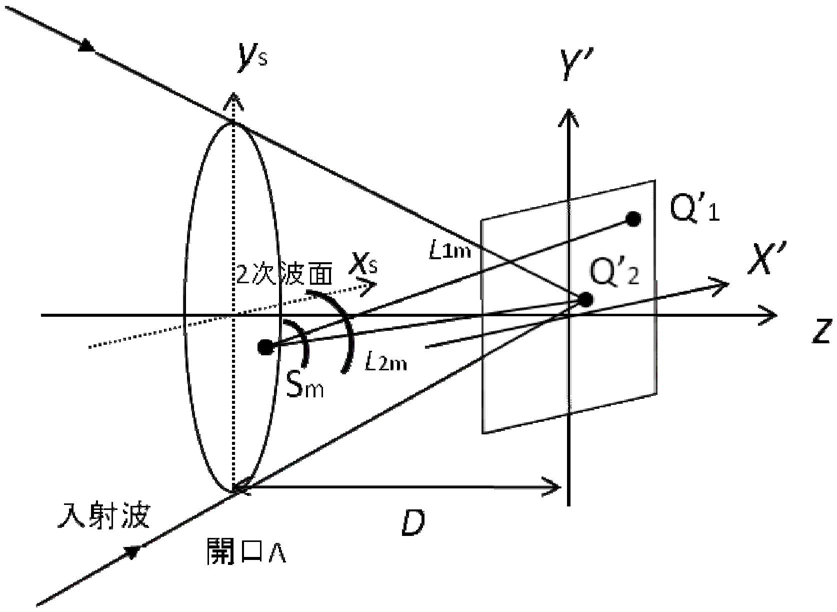

図２　　開口Λと回折像

ここでもし図 2 において開口 A を通過して Q'₂ に収束する球面波を考えれば、この球面波は収束点から L_2 の距離にあるスクリーン上の点 S においては、$a(S)/L_2$ で S における最大振幅を表すとして

$$V(S,t) = a(S) \frac{\exp(-ikL_2)}{L_2} \exp(-i\omega t) \qquad -（11）$$

と表せる。この式でスクリーン上の振幅分布が得られ、スクリーン上の各々の 2 次光源から Q'₁に回折光としての影響を及ぼす発散する 2 次球面波、

$$V'(S,t)=\frac{\exp(ikL_1)}{L_1}\exp(i\omega t) \qquad -（12）$$

が発生するので、斯様にホイヘンスーフレネルの回折理論からの帰結として、Q'₁における複素振幅分布として、時間項を落して

$$U(Q_1')=\frac{1}{N'}\int_A a(S)\frac{\exp\{ik(L_1-L_2)\}}{L_1L_2}dS \qquad -（13）$$

なる式を得る。（N'は S から Q'₁、Q'₂への方向の角度差が微小と置いた時の定数である。）この式は(7)式と同じ形式の式であり、Q'₂を回折中心とする Q'1 のホイヘンスーフレネルの回折理論による複素振幅が、Q'₂、Q'₁間の相互強度に比例することが、そしてその値を開口上の振幅分布で正規化した値が複素コヒーレンス度と一致することが表わされている。この事柄をファン・シッターーツェルニケ（van　Citter－Zernike）の定理と呼ぶ。

さて、ここでさらに、図 1 にある様に座標系をとり、S_m,Q_1',Q_2'の座標をそれぞれ(x_S,y_S)、（X_1', Y_1'）、（X_2', Y_2'）とすると、2 平面間の光軸上の距離を D に比べて、これらの座標が十分小さい場合には、一次近似をとり、

$$L_1=\sqrt{\left(X_1{}'-x_S\right)^2+\left(Y_1{}'-y_S\right)^2+D^2}$$

$$\approx D+\frac{1}{2D}\left\{\left(X_1{}'-x_S\right)^2+\left(Y_1{}'-y_S\right)^2\right\} \qquad -（14）$$

同様に L_2 についても考えて、

$$L_1-L_2=\frac{1}{2D}\left\{\left(X_1{}'^2+Y_1{}'^2\right)-\left(X_2{}'^2+Y_2{}'^2\right)\right\}-\frac{1}{D}\left\{\left(X_1{}'-X_2{}'\right)x_S+\left(Y_1{}'-Y_2{}'\right)y_S\right\}$$

－（15）

となる。この（15）式を（13）式に代入すると、（15）式右辺第１項は x_s, y_s に関する積分とは関係がないので ψ と置いて、また、$I(S)$を座標の関数 $I(x_s,y_s)$、dSは dx_s,dy_s として、

$$\mu_{12}=\frac{\exp(ik\varphi)\int\int_S I(x_S,y_S)\exp\left[-ik\left\{\frac{\left(X_1'-X_2'\right)}{D}x_S+\frac{\left(Y_1'-Y_2'\right)}{D}y_S\right\}\right]dx_S\,dy_S}{\int\int_S I(x_S,y_S)dx_S\,dy_S}$$

―（16）

となる。光源強度分布のフーリエ変換が複素コヒーレンス度であることが分かる。また、これは本連載 27 回(16)式における瞳関数とフラウン・ホーファー回折像との関係と同様である。これはファン・シッターーツェルニケ（van　Citter－Zernike）の定理の遠方領域における形である。ここでは、複素コヒーレンス度は受光面上の２観測点間の距離の関数となっている。

2． 参考文献

1） M.Born & E.Wolf : **光学の原理 I 、第 7 版／草川徹訳 (東海大学出版会,2005)**

2） **小瀬輝次：フーリエ結像論 (共立出版社、東京、１９７９)**

3） **牛山善太：波動光学エンジニアリングの基礎（オプトロニクス社、東京、2005）**

４）Emil　Wolfe：Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light (Cambridge University Press,Cambridge,2007)