

光学設計ノート 34 (ver.1.0)

## 部分的コヒーレント結像の考え方 4

### Hopkins の公式について

株式会社タイコ  
牛山善太

今回は前回における式を用いてコヒーレントに照明され得る領域、また均一空間において考えられたファン・シッター - ツェルニケの式を、様々な伝播状態の想定出来る表現へと拡張する。

#### 1. コヒーレントに照明される領域

ここで、光源 が光軸を中心とする半径  $r$ 、面積  $S$  の一様なインコヒーレントに発光する円盤であるとすれば、光源から軸上距離  $Z$  離れた平面上の点  $Q_1'(X'_1, Y_1)$ 、 $Q_2'(X'_2, Y_2)$  における複素コヒーレンス度  $\mu_{12}$  は光源強度のフーリエ変換の形として本連載 33 回(16)式

1

$$\mu_{12} = \frac{\exp(ik\phi) \int \int_S I(x_S, y_S) \exp \left[ -ik \left\{ \frac{(X'_1 - X'_2)}{Z} x_S + \frac{(Y'_1 - Y'_2)}{Z} y_S \right\} \right] dx_S dy_S}{\int \int_S I(x_S, y_S) dx_S dy_S}$$

(33 - 16)

からベッセル関数を用いて、

$$\mu_{12} = \left\{ \frac{2J_1(v)}{v} \right\} \exp(i\phi) \quad (1)$$

<sup>1</sup> 光源から原稿面までの光軸沿いの距離を以降、 $D$  から  $Z$  に改めた。

と表せる。この結果は均一な射出瞳上の振幅分布の齎す回折像振幅分布と同じになるので、円形開口の場合のフラウンホーファー回折像の計算結果<sup>2</sup>、

$$U(\omega) = \pi A' \rho^2 \frac{2J_1\left(\frac{k\omega\rho}{z}\right)}{\frac{k\omega\rho}{z}} \quad (2)$$

を利用している。(参考文献 3) P136、(25)式において  $D=2$  と置き換えた。) 正規化により像面上の  $X', Y'$ 座標に無関係な係数は消える。この時(1)式に於いて ( $\bar{\lambda}$  は準単色光の波長平均値である。本連載 32 回参照)

$$v = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho}{Z} \overline{Q_1' Q_2'} \quad (3)$$

(1)式、(33回 - 14)式における積分外項の位相については、もともと本連載 33 回(15)式、

$$L_1 - L_2 = \frac{1}{2Z} \left\{ \left( X_1'^2 + Y_1'^2 \right) - \left( X_2'^2 + Y_2'^2 \right) \right\} - \frac{1}{Z} \left\{ \left( X_1' - X_2' \right) x_s + \left( Y_1' - Y_2' \right) y_s \right\} \quad (33-15)$$

における右辺第一項を  $\varphi$  と表し、積分外に出したものであるから、

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\left\{ \left( X_1'^2 + Y_1'^2 \right) + \left( X_2'^2 + Y_2'^2 \right) \right\}}{2Z} \quad (4)$$

である。  $\varphi$  は点光源  $S$  を座標原点においた時の位相差  $2\pi(\overline{SQ_1'} - \overline{SQ_2'})/\bar{\lambda}$  を表している。もし物体面上の 2 点の距離が、光源面 物体面間の距離に比し十分に小さく、 $\left( \overline{SQ_1'} - \overline{SQ_2'} \right) \ll \bar{\lambda}$  であれば  $\exp(i\varphi) \approx 1$  と出来て、(1)式より複素コヒーレンス度は  $v=0$  でピーク値  $\mu_{12} = 1$  をとる。  $v=1$  の時は、(1)式において  $\mu_{12} = 0.88$  となる。12%程度のコヒーレンス度の落ちは一般的には目立たないものなので、大掴みにこの値をコヒーレントの許容量とすれば、(3)式より

<sup>2</sup> は回転対称なフラウンホーファー回折像におけるその中心からの距離

$$\overline{Q_1'Q_2'} = \frac{\bar{\lambda}Z}{2\pi\rho} \approx \frac{0.16\bar{\lambda}Z}{\rho} \quad (5)$$

$\tan \alpha = \rho/Z \approx \alpha$  なる見込み半角の円盤状光源によりコヒーレントに照明され得る 2 点  $Q_1'$ 、 $Q_2'$  の最大距離 (円形領域の直径)  $\omega_{\max}$  は(5)式より、

$$\omega_{\max} = 0.16 \frac{\bar{\lambda}}{\alpha} \quad (6)$$

と考えることが出来る。

## 2 . Hopkins の公式

(33-16)式は、光源と原稿面間の媒質は均一であると仮定して導かれた。そこで、媒質が不均一であったり、レンズ等が存在して幾つかの異なる屈折率の層から出来ている場合にも適用できる様にこの(33-16)式を一般化しよう。

8 . 1 . 3 で考えたように面積  $S$  の光源  $S$  が波長に比べても十分に小さい  $m$  個の微小光源素  $S_m$  から出来ているとする。そしてこの微小光源内に点光源  $S$  (2 次波元) を考え、この点光源が、そこから単位距離において単位強度、初期位相 0 を持つと仮定した場合に、この点光源の影響による原稿面上の点  $Q'$  の複素振幅を、光源  $S$  原稿間の任意のタイプの媒質の透過関数  $K(S, Q')$  と定義する。この様な関数を想定すれば、 $S$ 、 $Q'$ 、 $Z$ 、 $\lambda$ 、 $\rho$ 、 $\alpha$ 、 $\omega$ 、 $\omega_{\max}$ 、 $\bar{\lambda}$ 、 $\bar{\nu}$ 、 $\bar{k}$ 、 $\bar{\rho}$ 、 $\bar{\alpha}$ 、 $\bar{\omega}$ 、 $\bar{\omega}_{\max}$ 、 $\bar{\lambda}$ 、 $\bar{\nu}$ 、 $\bar{k}$ 、 $\bar{\rho}$ 、 $\bar{\alpha}$ 、 $\bar{\omega}$ 、 $\bar{\omega}_{\max}$ 、 $\bar{\lambda}$ 、 $\bar{\nu}$ 、 $\bar{k}$ 、 $\bar{\rho}$ 、 $\bar{\alpha}$ 、 $\bar{\omega}$ 、 $\bar{\omega}_{\max}$  の原稿面間のより一般的な空間の屈折率の分布にも対応出来る。本連載前回 3 3 回の(2)式においては均一な媒質を想定しこの関数に光源から放射される球面波を当て嵌めた訳である。

今回の場合に、もし媒質が均一であると考えれば、2 次波元からの球面波の伝播が考えられ  $S, Q'$  を結ぶ直線と微小面積  $S_m$  の法線のなす角度はあまり大きくないと仮定した場合のフレネル - キルヒホッフの回折積分の帰結、本連載 27 回(1)式

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\sigma} g(x_0, y_0) \frac{\exp\{iks\}}{s} d\sigma \quad (27 - 1)$$

から、 $s$  を  $Z$  に置き換えて ( $\bar{\nu}, \bar{k}$  は波長同様、準単色光における平均値である。)

$$K(S, Q', \bar{\nu}) = -\frac{i}{\bar{\lambda}Z} \exp(i\bar{k}Z)$$

である。このような場合における整合性も考慮し

$$i\bar{\lambda}K(S, Q', \bar{\nu}) = \frac{\exp(i\bar{k}Z)}{Z} \quad (7)$$

と言う形にして本連載 33 回(7)式に入れ込めば

$$J_{12}(Q'_1, Q'_2) = \bar{\lambda}^2 \int_{\sigma} I(S)K(S, Q'_1, \bar{\nu})K^*(S, Q'_2, \bar{\nu})dS \quad (8)$$

と表現できる。また、本連載 32 回(11)式より  $Q'_1$ 、 $Q'_2$ における強度を利用して

$$\mu_{12}(Q'_1, Q'_2) = \frac{\bar{\lambda}^2}{\sqrt{I(Q'_1)}\sqrt{I(Q'_2)}} \int_{\sigma} I(S)K(S, Q'_1, \bar{\nu})K^*(S, Q'_2, \bar{\nu})dS \quad (9)$$

とも出来る。さらに

$$i\bar{\lambda}K(S, Q'_j, \bar{\nu})\sqrt{I(S)} = U(S, Q'_j) \quad (10)$$

と置いて、透過関数として、微小実光源からの光波の伝播式に光源の振幅まで含めてしまえば(8)(9)式はそれぞれ

$$J_{12}(Q'_1, Q'_2) = \int_{\sigma} U(S, Q'_1)U^*(S, Q'_2)dS \quad (11)$$

$$\mu_{12}(Q'_1, Q'_2) = \frac{1}{\sqrt{I(Q'_1)}\sqrt{I(Q'_2)}} \int_{\sigma} U(S, Q'_1)U^*(S, Q'_2)dS \quad (12)$$

と言う簡潔な形になる。これらの式を Hopkins ( H.H.Hopkins ) の公式と呼ぶ。ある光源部分から齎される、注目する原稿面上の 2 点  $Q'_1$ 、 $Q'_2$  それぞれにおける複素振幅値から複素コヒーレンス度を得ることができる。

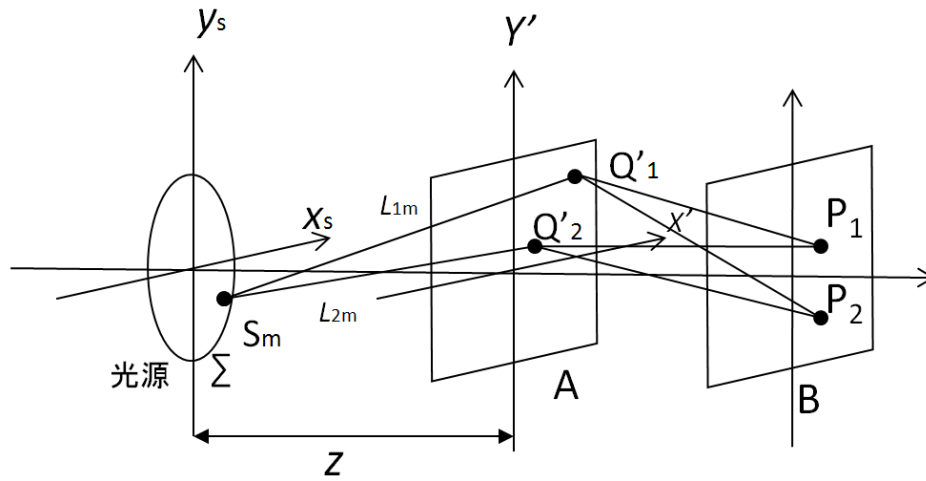


図1 相互強度の伝播

ここで、上記原稿面 A の後ろにさらなる物体面 B を想定し、この面上の点  $P_i$  を考えれば(図 1)、それらの点における透過関数はこれらの点における複素振幅場を考えれば良いわけであるから、 $Q'_i$  から  $P_i$  までの透過関数を用いて

$$K(s, P_i, \bar{\nu}) = \int_{\sigma} K(S, Q'_i, \bar{\nu}) K(Q'_i, P_i, \bar{\nu}) dQ_i \quad (13)$$

と表せる。また(8)式と同様に考えて

$$\begin{aligned} J_{12}(P_1, P_2) &= \bar{\lambda}^2 \int_{\sigma} I(S) K(S, P_1, \bar{\nu}) K^*(S, P_2, \bar{\nu}) dS \\ &= \bar{\lambda}^2 \iiint I(S) K(S, Q'_1, \bar{\nu}) K(Q'_1, P_1, \bar{\nu}) K^*(S, Q'_2, \bar{\nu}) K^*(Q'_2, P_2, \bar{\nu}) dS dQ'_1 dQ'_2 \end{aligned} \quad (14)$$

(8)式から

$$J_{12}(P_1, P_2) = \iint J_{12}(Q'_1, Q'_2) K(Q'_1, P_1, \bar{\nu}) K^*(Q'_2, P_2, \bar{\nu}) dQ'_1 dQ'_2 \quad (15)$$

となり、A,B 面上の各点間の透過関数が分かれば相互強度の伝播を計算することが出来る。結像を、光源から原稿、光学系、像面と通じて総合的に表現するためには重要な関係である。

### 3. 参考文献

- 1) M.Born & E.Wolf: 光学の原理、第7版 / 草川徹訳(東海大学出版会,2005)
- 2) 小瀬輝次: フーリエ結像論(共立出版社、東京、1979)
- 3) 牛山善太: 波動光学エンジニアリングの基礎(オプトロニクス社、東京、2005)
- 4) Emil Wolf: Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light (Cambridge University Press,Cambridge,2007)