

## 部分的コヒーレント光学系の結像式について

株式会社タイコ  
 牛山善太

これまで扱ってきた部分的なコヒーレンシーの概念を導入する事により、より一般的な結像の表現、定式化が可能となる。ここではその重要な表現手段について解説させていただく。

### 1 結像の定式化

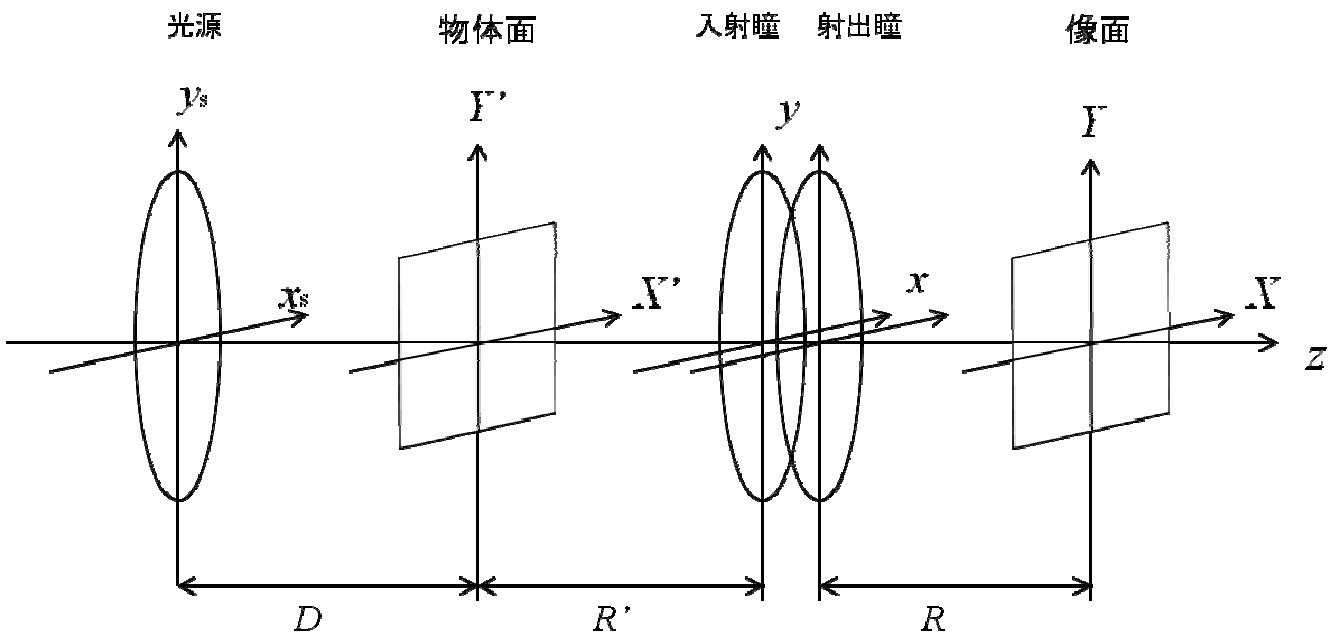


図1 光学系全系

図1のような結像系を考える。左からインコヒーレントな一次光源面  $S$ :座標 $(x_s, y_s)$ 、

透過物体面： $(X', Y')$ 、結像光学系入射瞳面、射出瞳面： $(x, y)$ 、像面： $(X, Y)$  である。

ここで、光源面と物体面のコヒーレンス度の間にはファン・シッターツェルニケの定理によりフーリエ変換の関係があり、フーリエ変換内の指数関数は、2 平面の距離を  $D$ 、物体面上の 2 点間の距離を  $\Delta X'$ 、 $\Delta Y'$  として本連載 33 回(16)式より

$$\exp\{-i2\pi(\Delta X' x_s + \Delta Y' y_s)/(\lambda D)\}$$

また、物体面上の透過振幅分布と、入射瞳面上の振幅分布の間にもフーリエ変換が成立していて、 $R'$  をこれらの軸上面間隔とすれば、フーリエ変換内の指数関数は

$$\exp\{-i2\pi(xX' + yY')/(\lambda R')\}$$

となる。さらに、射出瞳と像面の間にもフーリエ変換の関係が成り立ち、フーリエ変換内の指数関数は  $R$  をこれらの面の軸上面間隔とすれば、本連載 27 回 (14) 式より

$$\exp\{-i2\pi(xX + yY)/(\lambda R)\} \quad (1)$$

となる(本連載 28 回 (12) 式)。ここで、以降の計算上の利便性から、 $(x, y)$  以外の座標を以下のように変換する。

$$\begin{aligned} x' &= x_s R' / D & , & & y' &= y_s R' / D \\ X'_D &= X' / (\lambda R') & , & & Y'_D &= Y' / (\lambda R') \\ X_D &= X / (\lambda R) & , & & Y_D &= Y / (\lambda R) \end{aligned} \quad - (2)$$

この様なスケーリングにより上述の 3 つの指数関数はそれぞれ、以下の如くになる。

$$\begin{aligned} &\exp\left\{-2\pi i\left(x'\Delta X'_D + y'\Delta Y'_D\right)\right\} \\ &\exp\left\{-2\pi i\left(xX'_D + yY'_D\right)\right\} \end{aligned} \quad - (3)$$

$$\exp\{-2\pi i(xX_D + yY_D)\}$$

ここで、物体の振幅透過率分布を  $O(X_D, Y_D)$  とし、また、インコヒーレントな光源面上の微小面積素  $dS_m$  による、物体面上の振幅分布  $A$  は、この  $dS_m$  の座標と、物体面上の観測点の座標により表現され得るので

$$A(x'_m, y'_m, X'_D, Y'_D)$$

と表す。従って、照明系の影響も含めた物体面上の振幅分布は

$$A(x'_m, y'_m, X'_D, Y'_D) \cdot O(X'_D, Y'_D)$$

として表される。また、結像レンズの点像振幅分布を  $ASF(X, Y)$  と記す。そしてさらに全系を通じて考察されるべき、像面上の振幅分布を  $V(X_D, Y_D)$  とし、アイソプラナティズムを想定すれば  $V$  は物体面上の振幅分布に、光学系の点像振幅分布をコンボリュートすることにより得られ、さらに、インコヒーレントな多数の光源素影響を合計すると、((2)式の座標変換により  $(X'_D, Y'_D)$  と  $(X_D, Y_D)$  に関しては等倍率の場合と同様の表現になるように設定されている。) また、物体面上の任意の位置  $Q'_1$  の座標  $(X'_{D1}, Y'_{D1})$  を積分変数と考え、像面上の点  $(X_{D1}, Y_{D1})$  における振幅分布は、

$$V_1(X_{D1}, Y_{D1}) = \sum_m \iint_{-\infty}^{\infty} A(x'_m, y'_m, X'_{D1}, Y'_{D1}) O(X'_{D1}, Y'_{D1}) ASF(X_{D1} - X'_{D1}, Y_{D1} - Y'_{D1}) dX'_{D1} dY'_{D1} \quad - (4.A)$$

また、物体面上の任意の位置  $Q'_2$  の座標  $(X'_{D2}, Y'_{D2})$  を、新たな積分変数としたまったく同様の式を像面上の点  $(X_{D2}, Y_{D2})$  に考えれば、

$$V_2(X_{D2}, Y_{D2}) = \sum_m \iint_{-\infty}^{\infty} A(x'_m, y'_m, X'_{D2}, Y'_{D2}) O(X'_{D2}, Y'_{D2}) ASF(X_{D2} - X'_{D2}, Y_{D2} - Y'_{D2}) dX'_{D2} dY'_{D2} \quad - (4.B)$$

と表現できる。このときこれらの二つの関数の表す振幅分布の相互強度 (本連載 32 回(9)式) を事務的に考えると、まったくそれぞれ独立した積分であるから、積分内で積の形にできて、

$$\begin{aligned}
J_{12}(X_D, Y_D) &= \left\langle V_1(X_{D1}, Y_{D1}) V_2^*(X_{D2}, Y_{D2}) \right\rangle \\
&= \iiint \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \sum_m \sum_n A(x'_m, y'_m, X_{D1}, Y_{D1}) A^*(x'_n, y'_n, X_{D2}, Y_{D2}) \right\rangle O(X_{D1}, Y_{D1}) O^*(X_{D2}, Y_{D2}) \\
&\quad \cdot ASF(X_{D1} - X_{D1}', Y_{D1} - Y_{D1}') ASF^*(X_{D2} - X_{D2}', Y_{D2} - Y_{D2}') dX_{D1}' dX_{D2}' dY_{D1}' dY_{D2}' \\
&\quad (5)
\end{aligned}$$

となる。時間平均の項に於いては上述したように、 $m = n$  の場合のみ値を持つ。この項についてさらに光源を連続化して考えると、前節と同様にして、

$$\begin{aligned}
&\left\langle \sum_m A(x'_m, y'_m, X_{D1}, Y_{D1}) A^*(x'_m, y'_m, X_{D2}, Y_{D2}) \right\rangle \\
&= \left\langle \iint_S A(x', y', X_{D1}, Y_{D1}) A^*(x', y', X_{D2}, Y_{D2}) dx' dy' \right\rangle \\
&= J_{12}(X_{D1}', Y_{D1}', X_{D2}', Y_{D2}') \quad - (6)
\end{aligned}$$

これは、物点  $Q_1'$ 、 $Q_2'$  における相互強度を表している。インコヒーレント光源であるから、それぞれの光源部からの相互強度の加え合わせで、総合的な相互強度を得ることが出来る。

(6)式の関係を用いて、(5)式は、

$$\begin{aligned}
J_{12}(X_D, Y_D) &= \iiint \int_{-\infty}^{\infty} J_{12}(X_{D1}', Y_{D1}', X_{D2}', Y_{D2}') O(X_{D1}', Y_{D1}') O^*(X_{D2}', Y_{D2}') \\
&\quad \cdot ASF(X_{D1} - X_{D1}', Y_{D1} - Y_{D1}') ASF^*(X_{D2} - X_{D2}', Y_{D2} - Y_{D2}') dX_{D1}' dX_{D2}' dY_{D1}' dY_{D2}' \\
&\quad (7)
\end{aligned}$$

となる。(7)式は照明系を含む結像系全体の働きを波動光学的に、一般的に表現する重要な式である。(7)式における原稿面上の相互強度の部分に、(7)式の計算結果を用い、さらに(4. A,B)式を用いれば、像面上分布を新たな物体面振幅分布と看做しこの光学系の後に

続く光学系の結像に対しても、計算を続けられる形となる。

ここで、点  $(X_{D1}, Y_{D1})$  と  $(X_{D2}, Y_{D2})$  を同一の像面上の点  $(X_D, Y_D)$  とすれば、(7)式は

$$J_{12}(X_D, Y_D) = \iiint \int_{-\infty}^{\infty} J_{12}(X_{D1}', Y_{D1}', X_{D2}', Y_{D2}') O(X_{D1}', Y_{D1}') O^*(X_{D2}', Y_{D2}') \\ \cdot ASF(X_D - X_{D1}', Y_D - Y_{D1}') ASF^*(X_D - X_{D2}', Y_D - Y_{D2}') dX_{D1}' dX_{D2}' dY_{D1}' dY_{D2}' \quad (8)$$

となり、一点  $(X_D, Y_D)$  の相互強度を考えている訳であるから

$$J_{12}(X_D, Y_D) = I(X_D, Y_D)$$

と、(8)式は強度そのものを表す事になる (本連載 31 回 (8) 式)。

## 2 . 参考文献

- 1) M.Born&E.Wolf: 光学の原理、第7版/草川徹訳(東海大学出版会、東京、2005)
- 2) 小瀬輝次: フーリエ結像論(共立出版社、東京、1979)
- 3) 牛山善太: 波動光学エンジニアリングの基礎(オプトロニクス社、東京、2005)