

光学設計ノート

光学設計ノート 8 (ver.1.0)

エッジの結像とその画像処理と光学設計について

株式会社タイコ 牛山善太

1. はじめに、物体の位置

一般的なマシンビジョンにおいて、あるいはデジタル画像のエッジの補正において、物点とこれに対応する点像の位置の対応が正確に認知出来ることは重要なことであり、意外と困難が付きまとう。単純な点像の位置ズレである歪曲収差の影響を除いたとしても、収差により、ある程度の大きさの広がりを持ってしまう点像のどこが、正しい結像の位置を示しているのかを知る事は、簡単なことではない。例えば極小さな点光源の動きを観察する場合、その位置を正確に知るに際し、PSF の範囲内で誤差が起こりえる。光学設計時の主光線到着位置とは測定上は便宜的なものであるし、非対称性収差が発生した場合には照度の重心位置が必ずしも基準となり得る訳ではない。下記のエッジ強調処理の場合にも、エッジを画像処理的に立てても、その位置が、傾斜したエッジ像部分のどこにあるべきなのかの判断には難しいものがある。

そこで、単純な対処法ではあるが、軸外においてメリディオナル方向に対称性を維持したコマ収差の少ない光学系を用いる事が妥当である(アイソプラナティックである必要は無い)。本来、光束を非常に絞った場合に結像位置を与える近軸主光線到着位置と、PSFの照度重心が一致するからであり、その位置は画像から検出可能である。画像の2値値に際して閾値の変化による重心移動も当然少なくなる。

2. エッジの強調

非光学的ではあるが、デジタルカメラ等の画像処理においては明暗部のエッジを検出して、エッジの急峻度を増すような処理が行なわれる。これは画像のメリハリを向上させる効果を持つ。当然エッジスプレッドファンクションは立ち上がるわけであるから、部分的にMTFは無理に向上させられることになる。

さて、高さ1のエッジを表わすエッジ関数と、エッジに水平な方向の線状の被写体の光学系による結像の強度分布、LSF(ラインスプレッドファンクション)関数 $L(x)$ のコンボリューション積分によりエッジ像分布は得られるはずである。

ここでは上記面積 F を得るための計算の都合上、エッジを表わす関数として、 $\text{sgn}(x)$ 関数(シ

グナム関数)を用いる。この場合この関数は、 x が正のとき+1を、負のとき-1を採る関数であり、 $x = 0$ のとき不連続となりエッジを形成する。コンボリューション積分を*で表現すれば、 $\text{sgn}(x)$ をエッジ関数 $n(x)$ としてエッジ像を表す関数 $P(x)$ は

$$P(x) = n(x) * L(x) \quad (1)$$

この畳み込み積分の様子を図2(a)に示す。

一般的には(1)式におけるコンボリューションの結果、 $P(x)$ は非対称な関数となる。エッジ像の最大値の1/2の高さの所を、エッジ被写体の1/2の高さの位置に合わせて、像と被写体を重ねて考えれば、 $P(x)$ は原点(0,0)を通過し、図1、斜線の、 $\text{sgn}(x)$ と $P(x)$ とに囲まれる面積が $2E$ となる。

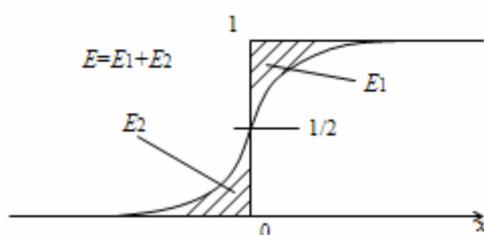


図1 エッジ像と不鮮鋭面積面積E

従って、積分の結果を x が負の領域でも正にして表現を簡便にするために $n(x)$ を乗じて

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} n(x) \{n(x) - P(x)\} dx \quad (2)$$

ところで、コンボリューション定理により、フーリエ変換を $FT[\]$ として表わせば

$$FT[n(x) * L(x)] = FT[n(x)] \cdot FT[L(x)] \quad (3)$$

2関数のコンボリューション積分のフーリエ変換は、おのこの関数のフーリエ変換の積となる性質がある。 $L(x)$ のフーリエ変換は x 方向へのOTFであり¹⁾、それを空間周波数を ν として $\psi(\nu)$ と置き、

$$FT[n(x)] = FT[\text{sgn}(x)] = \frac{1}{i\pi\nu} \quad (4)$$

であるので、(1)式より

$$FT[P(x)] = \frac{\psi(v)}{i\pi v} \quad (5)$$

さらに、フーリエ変換のパワー定理 (Power Theorem)³⁾より、任意の2関数 f_1 、 f_2 について、これらの関数のフーリエ変換をそれぞれ F_1 、 F_2 とし、右肩に * で複素共役を表わすとすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2^*(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(v)F_2^*(v)dv \quad (6)$$

なる関係が成り立つ。よって、 $n(x)-P(x)$ は実数であるから形式的に複素共役としても結果に変わりはない、(2)式より

$$2E = \int_{-\infty}^{\infty} n(x)\{n(x)-P(x)\}^* dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\pi v} \left\{ \frac{1}{i\pi v} - \frac{\psi(v)}{i\pi v} \right\}^* dv \quad (7)$$

また、上述の通り、OTFの絶対値MTFを R 、位相PTFを ϕ として

$$\begin{aligned} \psi(v) &= R_v \exp\{i\phi_v\} \\ &= R_v \cos \phi_v + iR_v \sin \phi_v \end{aligned} \quad (8)$$

と表わせば、(7)式は

$$\begin{aligned} 2E &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\pi v} \left\{ \frac{1}{i\pi v} - \frac{R_v \cos \phi_v + iR_v \sin \phi_v}{i\pi v} \right\}^* dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\pi v} \left\{ \frac{-i(1-R_v \cos \phi_v)}{\pi v} - \frac{R_v \sin \phi_v}{\pi v} \right\}^* dv \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v^2} (1-R_v \cos \phi_v) dv + \frac{i}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v^2} R_v \sin \phi_v dv \end{aligned} \quad (9)$$

ところで、 $\psi(v)$ は実関数 $L(x)$ のフーリエ変換であり、その場合フーリエ変換の対称性から、フーリエ変換結果はエルミート性³⁾を持ち、それぞれ $\cos \phi_v$ についての(8)式右辺の実数部は偶関数、虚数部は奇関数となる。また、 $1/v^2$ は偶関数であり、(9)式右辺の第一の積分内の被積分関数は偶関

数、第二の積分内の被積分関数は奇関数と考える事が出来る。奇関数の- から までの積分は 0になり、偶関数は面積が直線 = 0に対し線対称に存在するので(9)式より

$$E = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \{1 - MTF_{\nu} \cdot \cos(PTF_{\nu})\} d\nu \quad (10)$$

となる。^{1,2)}

この式からは、積分内に周波数の 2 乗の逆数が含まれるので、レンズの高周波領域での性能のみならず、低周波域での MTF が大きな影響を持つことが分かる。また位相成分 PTF にも大きく結果が左右される。こうした内容を鑑み、検出も含めた画像処理の高効率化の為に不鋭面積 E の増大を抑える、諸制限の中で遣り繰る、ことの意識は肝要である。ここで注意が必要なのは絶対値の MTF と違い、位相差 PTF は原点の取り方により値が変化するという事である。(1)式の計算結果は、理想的なエッジとエッジ像のそれぞれの高さが一致するように設定した場合のものである。原点を移動に際しては(1)式には若干の補正が必要になる。

3 . エッジの位置

ここで、エッジの位置の再現について考察すると¹⁾、ここまでの考え方としては理想的なエッジ像(近軸結像と考えても良い。)に線像強度分布 $L(x)$ が畳み込まれてエッジ像が形成されているとして、この $L(x)$ と理想的エッジの位置関係が上記の通り、お互いの高さ中心で一致していると置いている。ここで、図 2 の様な sgn 関数を用いてエッジを表現して、(1)式の畳み込み積分を実行すると、図 2 (a)の如くになり x 軸の上部と下部で別々に畳み込みをする形になる。畳み込み始めの $L(x)$ の x 方向の位置を適当にとって全体 ($y = -1$ から 1) のエッジ像が原点を通過する様になっている。畳み込みが始まれば、 $x=0$ における像の照度 $h(0)$ は第 2 象限に存在する $L(x)$ の面積 A に等しい。またエッジ下部の高さ $h'(0)$ の絶対値は第 3 象限に存在する $L(x)$ の面積 A' に等しい(図 3)。この時、同じ x 位置から $L(x)$ の畳み込み積分が始まれば、0 から 2 までの範囲のエッジによる単純な畳み込み結果(図 2 (b))と、図 2(a)の全体の関数形状とは一致せねばならない。エッジが $y=0$ から 2 の場合と $y=0$ から 1 までの場合においての相違は、高さ方向に畳み込み積分結果の図形が一様に伸ばされた違いであるから、上部下部でそれぞれたたみ結果の関数は $h(0)=0.5$ 、 $h'(0) = -0.5$ を通過する。つまり $A=A'$ であって、 $L(x)$ はこの場合、理想エッジによって面積を 2 等分される位置に置かれていることになる。 $L(x)$ が x 方向について非対称であれば、実際には非対称性の収差により一般的にはこの原点で二つの関数は一致するとは限らない。しかし非対称性の収差が補正されていれば、理想エッジと、畳み込み開始位置での $L(x)$ の面積の 2 等分線は一致し、実際のエッジ像の高さの 1/2 のところで理想的な垂直エッジが交差する事になり、画像処理においても、理想エッジのそのあるべき位置が明確になる。

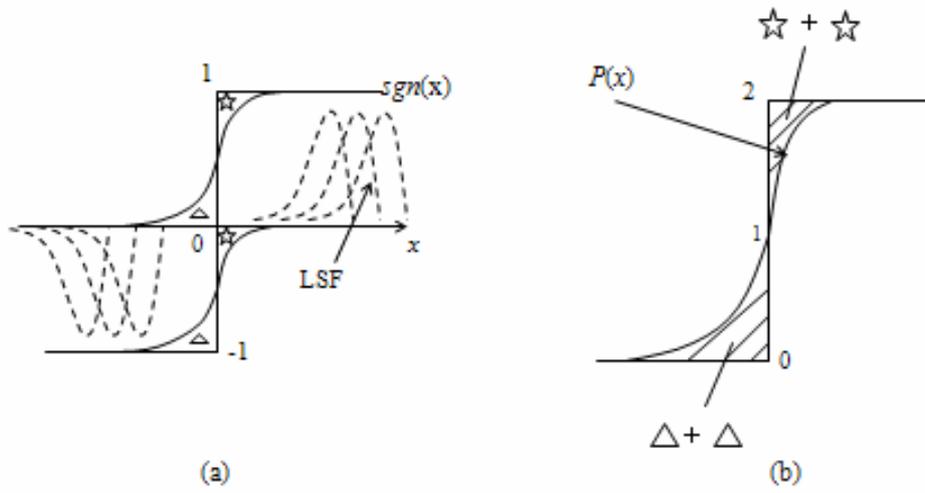


図2 LSFの量み込みと $P(x)$

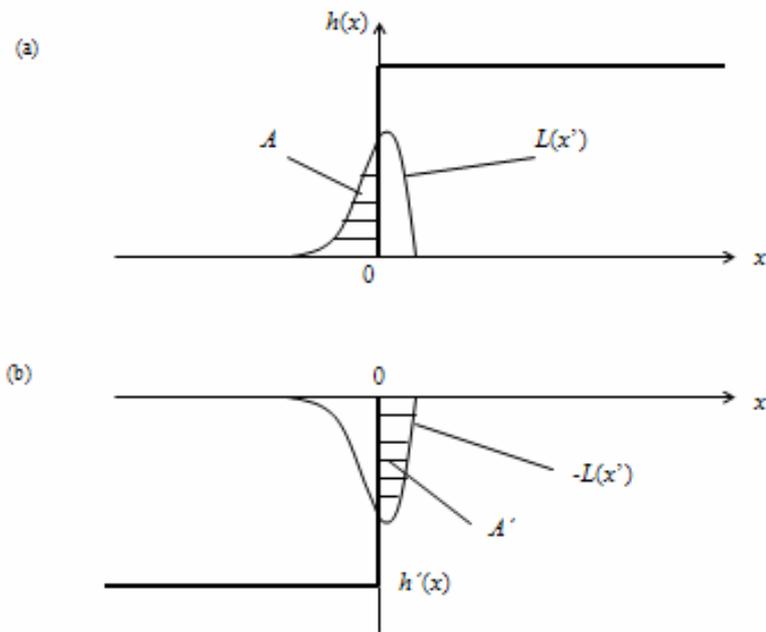


図3 エッジ面積計算のためのLSFの原点

4. 参考文献

- 1) 牛山善太、草川徹: シミュレーション光学 (東海大学出版会、東京、2003)
- 2) 松居吉哉: 結像性能評価のための OTF の取扱い、OPTICS DESIGN、No.5(1994)
- 3) 谷田貝豊彦: 光とフーリエ変換 (朝倉書店、東京、1992)