LED **照明ノーツ**　19

レンズを使う 6

＜プリズムの最小振れ角について＞

株式会社タイコ
牛山善太

これまで、お話しさせていただいてきた収差の話からは少し脱線するが、今回はプリズムによる光線の曲りについて解説させていただきたい。プリズムと言うものが光学素子としては非常に一般的なものであるので、光学機器を使い熟すうえで、勿論有用な topic であるが、プリズム面の連続としてレンズを考えることにより、レンズの収差発生の原因について考察する際にも非常に役に立つ知識である。

多少、導出式の部分が多くなったが、意外に単純では無いため、詳しく知りたい方もおられると思い、記した。不必要な方は、(15)式以降の結果のみご参照ください。

1.　プリズムとは

プリズム（prism）とは、光を屈折、或いは全反射させるための光学素子であり、硝子、水晶などの透明な媒質により成る、複数の平面により構成された多面体である。像を回転させたり、あるいは光を分散させたりするために様々な形状のものが存在する。

ここでは、その屈折の性質を調べるために断面が図 1 にあるような、三角柱の最も基本的なプリズム形状を考える。

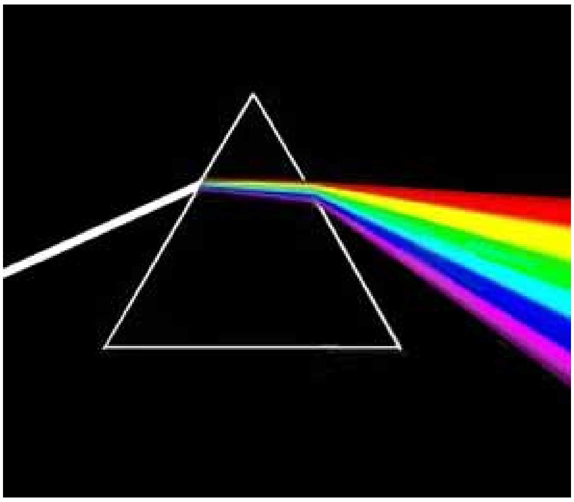

図１　　プリズムによる分光

さて、硝子の屈折率は、光の波長によって異なるため、そこでのプリズム各平面での屈折を、これまで度々登場した、スネルの屈折則、

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad (1)$$

で夫々考えれば、図１にあるように、プリズムを出る光の方向は波長によって変わることになる。光の明るさが色に分かれたものをスペクトルと呼び、この現象を積極的に用いることをプリズム分光という。

２．プリズムの最小振れ角

プリズムにおける、光線の屈折を細かく検討しよう。図２にあるように諸量をとる。δは最小振れ角（或いは偏角）と言い、プリズムへの入射光と、射出光の為す角度を指す。プリズム断面形状は二等辺三角形とし、媒質の屈折率をｎ,その頂角の大きさをαとする。すると両側の稜面において以下の屈折則が成立する。

$$\sin\theta_1 = n \ \sin\theta_2 \qquad (2)$$

$$\sin\theta_1' = n \sin\theta_2' \qquad (3)$$

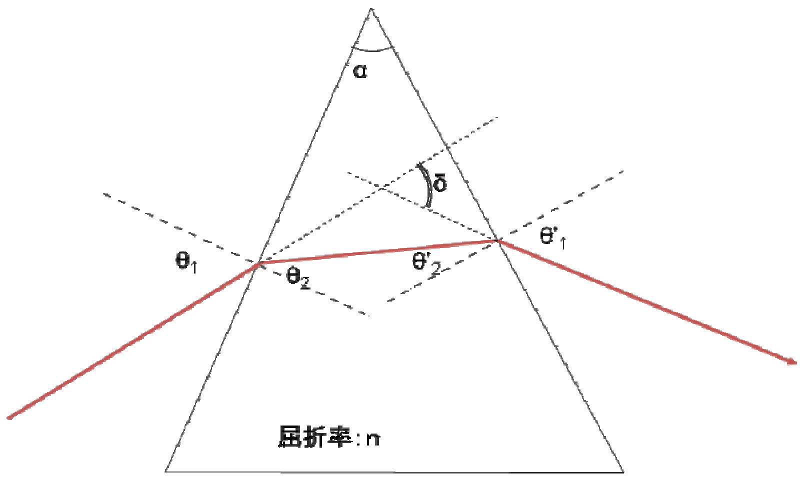

図２　　プリズムによる振れ角について考える。

従って、図２より振れ角δは、

$$\delta = \theta_1 - \theta_2 + (\theta_1' - \theta_2') \qquad (4)$$

また、

$$\frac{\pi}{2} - \theta_2 + \frac{\pi}{2} - \theta_2' = \pi - \alpha$$

$$\theta_2 + \theta_2' = \alpha \qquad (5)$$

よって、(4)式より、

$$\delta = \theta_1 + \theta_1' - \alpha \qquad (6)$$

となる。

さて、ここで、この振れ角が最小になる場合を考えよう（導出は主に参考文献１）による。)。そのために、まず(6)式を入射角 θ_1 で微分して、その値が０となる極値の位置を求める。

$$\frac{d\delta}{d\theta_1} = 1 + \frac{d\theta_1'}{d\theta_1} = 0 \qquad (7)$$

$$d\theta_1' = -d\theta_1 \qquad (8)$$

さらに、(5)式を入射角θ1 で微分すると、

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} + \frac{d\theta_2'}{d\theta_1} = 0 \qquad (9)$$

$$d\theta_2 = -d\theta_2' \qquad (10)$$

となる。

(2)式をθ1 で微分すれば、

$$\cos\theta_1 = n \ \cos\theta_2 \frac{d\theta_2}{d\theta_1}$$

$$d\theta_1 \cos\theta_1 = n \ d\theta_2 \cos\theta_2 \qquad (11)$$

さらに、(3)式をθ$_1$で微分すれば、

$$\cos\theta_1' \frac{d\theta_1'}{d\theta_1} = n\cos\theta_2' \frac{d\theta_2'}{d\theta_1}$$

$$d\theta_1' \cos\theta_1' = nd\theta_2' \cos\theta_2' \qquad (12)$$

が得られる。ここで、(11)式を(12)式で辺々割って、

$$\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_1'}\frac{d\theta_1}{d\theta_1'}=\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_2'}\frac{d\theta_2}{d\theta_2'}$$

従って、(8)(10)式より、

$$\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_1'}=\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_2'} \qquad (13)$$

となる。この式の両辺を２乗して、sin で表記すると

$$\frac{1-\sin^2\theta_1}{1-\sin^2\theta_1'}=\frac{1-\sin^2\theta_2}{1-\sin^2\theta_2'}$$

となり、さらに右辺に(2)(3)式を用いて、

$$\frac{1-\sin^2\theta_1}{1-\sin^2\theta_1'}=\frac{1-\left(\dfrac{\sin^2\theta_1}{n^2}\right)}{1-\left(\dfrac{\sin^2\theta_1'}{n^2}\right)}$$

$$\frac{1-\sin^2\theta_1}{1-\sin^2\theta_1'}=\frac{n^2-\sin^2\theta_1}{n^2-\sin^2\theta_1'} \qquad (14)$$

が得られる。この式を整理して解いていくと、

$$\sin^2\theta_1\left(n^2-1\right)=\sin^2\theta_1'\left(n^2-1\right)$$

$$\theta_1=\theta_1' \qquad (15)$$

となる。当然、

$$\theta_2 = \theta_2' \tag{16}$$

でもあって、頂角に対して対称な状態で光線がプリズムに入射し、射出していく場合が最小触れ角δ_0となることが分かる。この時、入射、射出位置の高さは同じなので、二等辺三角形を考えた場合には、光線はプリズム内部では底辺と平行になる。従って、(6)式より、

$$\delta_0 = 2\theta_1 - \alpha \tag{17}$$

また、（５）式より、

$$\theta_2 = \frac{\alpha}{2} \tag{18}$$

であって、(2)式より、

$$n = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

であって、(17)(18)式より、

$$n = \frac{\sin\left(\dfrac{\delta_0 + \alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

の関係が得られる。プリズムの頂角が分かり、最小振れ角が測定できれば、硝子の屈折率ｎが分かることになる。調べたい硝子から図 1、或いは 2 の様な小さなプリズムを作り、屈折率が測定できる。異なる波長について測定すれば、硝子の分散も測定でき、不明な硝子も、硝種を推測することが出来る。因みに、精度の良い分光器を用いれば頂角、最小振れ

角は 1 秒以下まで追い込め、屈折率の小数点以下５桁程度までは、一般的に測定可能なそうである[2)]。

4．参考図書

1)　谷田貝豊彦：例題で学ぶ光学入門（森北出版、東京、2010）、P25

2)　油　大作：通信講座テキスト"光学技術の基礎講座"（トリケップス、東京、1993）、P18