提供：
株式会社オプティカルソリューションズ
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8（MAS 三田ビル 3 階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/
e-mail:info@osc-japan.com

光学設計ノーツ　５９（ver.1.0）

キルヒホッフの回折積分式 2

株式会社タイコ
牛山善太

前回から実用的な回折振幅・強度計算の基礎となる、キルヒホッフ(Kirchhoff)の回折積分式について、ヘルムホルツ(Helmholtz)方程式から出発して述べさせて戴いているが、今回はヘルムホルツ-キルヒホッフの積分定理について、引き続いて解説させて戴く。

１．ヘルムホルツ－キルヒホッフの積分定理　②

前回(1)式のヘルムホルツ方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0 \qquad (58\text{-}1)$$

ただし、 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$

を満たす Green 関数として前回決めた(58-4)式、

$$G(Q)=\exp(iks)\Big/s \qquad (58\text{-}4)$$

を用いて、この球面波伝播式によって小球についての面積分を考えると

$$\frac{\partial G(Q)}{\partial n}=\frac{\partial G(Q)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial n}$$

$$=\frac{ik\exp(iks)\cdot s-\exp(iks)}{s^2}\frac{\partial s}{\partial n}$$

ここで、前回における、

$$\frac{\partial s}{\partial n}=\cos(\vec{n},\vec{s})$$

なる結果を用いると（cos の位相項はこれら二つのベクトルの為す角度を表す。)、

$$\frac{\partial G(Q)}{\partial n}=\cos(\vec{n},\vec{s})\left(ik-\frac{1}{s}\right)\frac{\exp(iks)}{s} \qquad -（6）$$

となる。さらに、ここでの積分はそもそも P を囲む微小球の表面積 S'について行われるべきものなので、点 Q が S'上に存在すると考えると、

$$G(Q)=\exp(ik\varepsilon)/\varepsilon=G(\varepsilon) \qquad -（7）$$

であり、S'上における $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{s}$ （$s=\varepsilon$）の方向は、今度は同じであるから（$\boldsymbol{n}$ は有効な体積内の方を向くので、S 上の点 Q におけるのと異なり、P を囲む球表面の外側に向かう法線ベクトルとなる）（図１)、

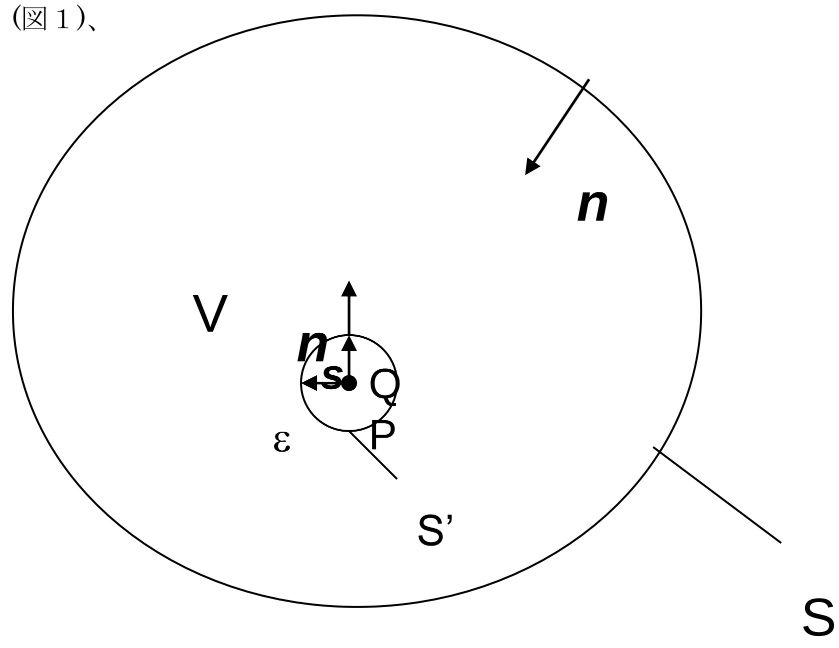

図１　　表面 S と S'上に法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向

$$\cos(\vec{n},\vec{s})=1$$

なり、(6) 式より

$$\frac{\partial G(Q)}{\partial n}=\left(ik-\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\exp(ik\varepsilon)}{\varepsilon}$$ ―（8）

と出来る。

又、小球面上の微小面積 dσ に対しての微小立体角 d Ω＝ d σ/ε ²を考え、また、 s → ε となり前回（5）式

$$\iint_S\left(U\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma+\iint_{S'}\left[U\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial U}{\partial n}\right]d\sigma=0$$ ―（58-5）

の左辺第二項について考えると、

$$\iint_{S'}\left[U\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial U}{\partial n}\right]d\sigma$$

$$=\iint_{4\pi}\left[U(\varepsilon)\left(ik-\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\exp(ik\varepsilon)}{\varepsilon}-\frac{\exp(ik\varepsilon)}{\varepsilon}\frac{\partial U(\varepsilon)}{\partial n}\right]\varepsilon^2 d\Omega$$

$$=\iint_{4\pi}\left\{ik\varepsilon U(\varepsilon)\exp(ik\varepsilon)-U(\varepsilon)\exp(ik\varepsilon)-\varepsilon\exp(ik\varepsilon)\frac{\partial U(\varepsilon)}{\partial n}\right\}d\Omega$$ （9）

となる。

ここで、(58-5) 式左辺第一項は S についての積分であり、ε に依存しないので左辺第二項について $\varepsilon \to 0$ なる場合を想定すると、U 及び、その微分は有限の値を持つので、(9) 式積分内の第１項、第３項は０になり、

$$\iint_{S'}\left[U\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial U}{\partial n}\right]d\sigma=\iint_{4\pi}-U(0)d\Omega$$

$$=-4\pi U(0) \qquad (10)$$

である。よって（58-5)、(10）式より

$$\iint_{S}\left[U\frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{\exp(iks)}{s}\right\}-\frac{\exp(iks)}{s}\frac{\partial U}{\partial n}\right]d\sigma=4\pi U(0)$$

よって、U はＰにおいても連続であり、U（０）はＰにおける U を表すので、上式は

$$U(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S}\left[U\frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{\exp(iks)}{s}\right\}-\frac{\exp(iks)}{s}\frac{\partial U}{\partial n}\right]d\sigma \quad -\ (11)$$

として表される。この式をヘルムホルツーキルヒホッフ(Helmholtz- Kirchhoff)積分（積分定理）と呼ぶ。

２． 参考文献

１） 飯塚啓吾：光工学（共立出版、東京、１９８３）
２） 石黒浩三：光学（共立出版、東京、１９５３）
３） 辻内順平：光学概論Ⅱ（朝倉書店、東京、1979）
４） J.Gaskill : Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics (JOHN WILEY & SONS,New York, 1978)
５） M.Born & E.Wolf :Principles of Optics,7th edition(Pergamon Press, Oxford,1993)／草川徹訳：光学の原理（東海大学出版会,2005)
６） ヤリーブ：光エレクトロニクス基礎編（多田邦夫、神谷武志監訳）（丸善、東京、2002）
７） E.Wolf:Proc.Roy.Soc.A253,349(1959)
８） 牛山善太：波動光学エンジニアリングの基礎（オプトロニクス社、東京、2005）