提供：Optical Solutions
株式会社オプティカルソリューションズ
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8（MAS 三田ビル 3 階）
TEL：03-5833-1332　 FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/

光学設計ノーツ 60 （ver.1.0）
平面波の表現について

株式会社タイコ
牛山善太

本連載第 5 回においてホログラムの原理について触れさせていただいた。そこではホログラム平面内に干渉縞が記録される所謂、薄いホログラムの範疇でお話をさせて頂いた。その続きとして（大分、時間が経ってしまったが）厚みのある、体積のあるホログラムについて考えさせていただきたいのであるが、今回はそのための予備知識として平面波について改めて触れさせていただく。本連載においてはたびたび登場し、非常に重要な“平面波“であるが、これまでそれ自体についての解説は行ってはいなかった。反省しつつここに記させていただきたい。

1. 正弦波の表現

正弦波は最も基本的でシンプルな波動の一つである。この正弦波が、x方向に速度vで進行する場合は、

$$u(x,t)=A\cos\{k(x-vt)+\phi\} \qquad (1)$$

と表わされる。波動の揺れ、変位の最大値 A を最大振幅、cos の中括弧内を位相と呼び、角度である。また、明らかに正弦波は周期を持っている。この様に時間的な周期性を持った波動を、時間に対して調和的（harmonic）であると言う。そこで空間的な1周期を波長 λ 、時間的な周期を周期 T で表わす。

$$T=\frac{\lambda}{v} \qquad (2)$$

（1）式の $u()$ は t を $t+T$ に置き換えても変化しない。kは波数と呼ばれ、波動が単位距離進行する時に変化する位相角度であり、

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \qquad (3)$$

と表わされる。波数に光波の進行距離を乗じれば進んだ位相が得られる。ϕ は初期位相の項であり、空間座標xと時間座標 tの原点を適当に選べば0にすることができる。また、周波数fを用いれば、

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda} \qquad (4)$$

であり、単位時間に変化する位相角度を角周波数 ω で表わし、

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad (5)$$

となる。

真空中の光速をcとすれば、ここまでの vは任意の媒質中の速度であるとして、cとvの比がその媒質の屈折率となり、

$$n = \frac{c}{v} \qquad (6)$$

である。

また、周波数fは不変であるので真空中の波長を λ_0として、(4) (6) 式より、

$$f = \frac{c}{n\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}$$

よって、

$$n\lambda = \lambda_0 \qquad (7)$$

となる。

波動の位相が等しい点を連ねた面を等位相面、或いは波面と呼ぶ。(1) 式により表わされる波動はx方向へ進行する1次元的波動であるが、x軸に垂直な平面を等位相面として形成する波は総べて (1) 式で表わされる。ある平面 (等位相面) 内の情報は(1)式ですべて表されてしまうし、他に表わされるものもない (必要十分)。この様に表わされる、等位相波面が平面の波動を平面波と呼ぶ。

２．平面波の表現

ここで、2次元、或いは3次元空間を伝播する平面波の記述について改めて説明させて頂こう。取りあえず2次元座標上で、**図１**に示した様に、

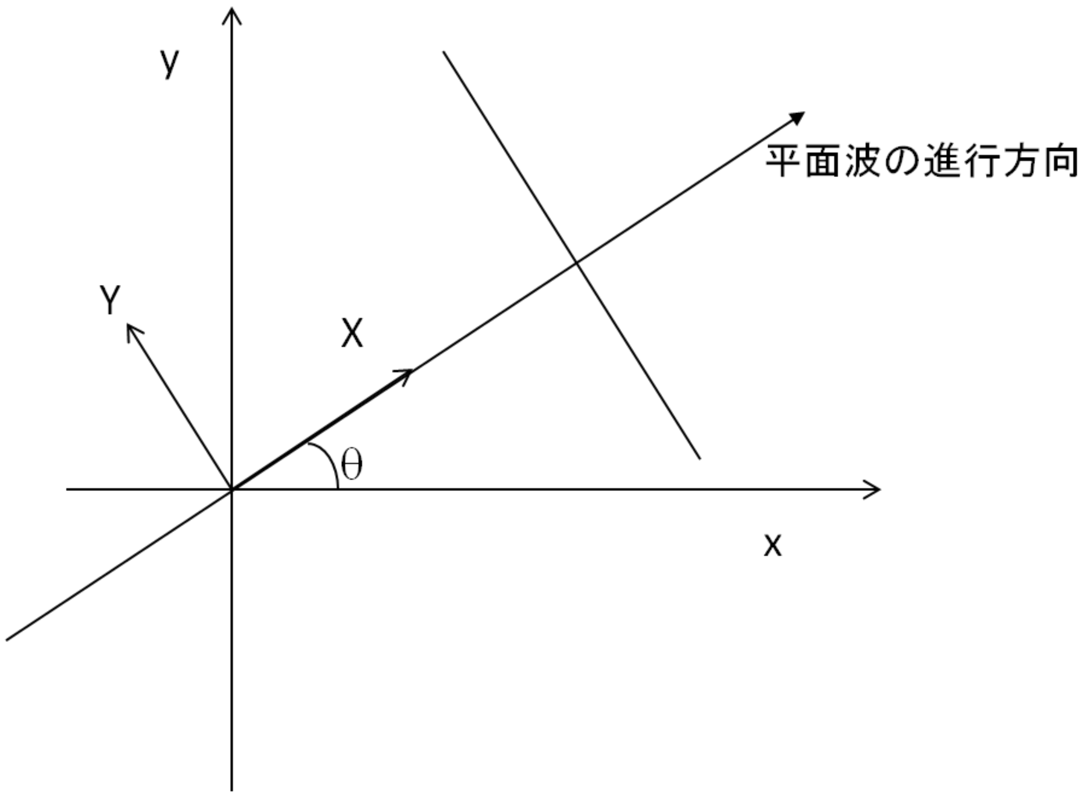

図１　　２次元的平面波

x軸とθの角度を為す方向に進行する正弦平面波を考えよう。新たに、旧座標と原点を共有し、波動の進行方向にX軸、これに直交した、波面の広がりに沿う方向にY軸を持つ新座標系を考えると、初期位相項を0とおいて、

$$kv = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{T} = \omega$$

なので、X 軸方向に進む正弦波は以下の如くに表せる。

$$u(X, Y, t) = A\cos(kX - \omega t) \qquad (8)$$

因みに位相を(-kX- ωt)とすると逆方向(xの負の方向)に進行する波を表わす。

この式をx－y旧座標に変換すると、

$$x = X\cos\theta \qquad 、 \qquad y = X\sin\theta$$

であり、また、

$$X = X\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)$$

$$X = X\sin\theta\cdot\sin\theta + Y\cos\theta\cdot\cos\theta$$

と表わせるので、これらの関係より(8)式は、

$$u(x,y,t) = A\cos\left[k\left(x\cos\theta + y\sin\theta\right) - \omega t\right] \qquad (9)$$

ここで、波数kを考えると、これは新 X 軸上で単位距離、波動が進行する時に変動する位相角を表わすので、X 軸に沿った方向(波動進行方向、この場合 X 軸方向)と量kを持ったベクトルを新しく考えることができる。これを波数ベクトルと呼ぶ。

$$\vec{k} = \left(k_x, k_y\right) = \left(k\cos\theta, k\sin\theta\right) \qquad (10)$$

よって、(9)式は、

$$u(x,y,t) = A\cos\left(k_x x + k_y y - \omega t\right) \qquad (11)$$

と表わすことができる。

さて、上記(11)式を3次元空間における波動の表現に拡張することは容易である。**図 2** における様に座標をとると、

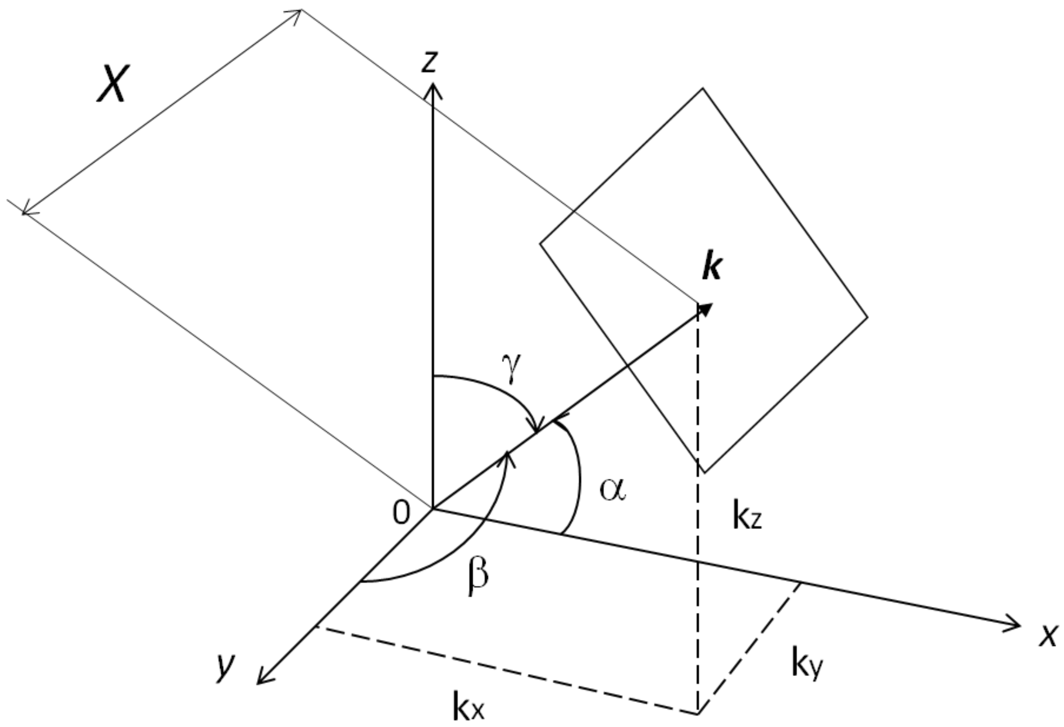

図２　　３次元的平面波

波面の進行方向を、波面座標系上の X 軸と考えれば、X 軸方向の旧座標に対する方向余弦を導入して、

$$x = X\cos\alpha \quad 、\quad y = X\cos\beta \quad 、\quad z = X\cos\gamma$$

また、$X^2=x^2+y^2+z^2$ なので、(9)式を得るときと同様に考えて、

$$u(x,y,z,t) = A\cos(kX-\omega t)$$
$$= A\cos(kx\cos\alpha + ky\cos\beta + kz\cos\gamma - \omega t) \qquad (12)$$

となる。ここで、ベクトル k は

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = (k\cos\alpha, k\cos\beta, k\cos\gamma)$$

と表 記 できるので、(12)式 は、

$$u(x,y,z,t)=A\cos(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t) \qquad (13)$$

である。また、任意の座標（x、y、z）の位置ベクトル$\vec{r}$を考えると、波動の進行方向を表わす波数ベクトルとの内積を用いて、内積はベクトル各成分それぞれの積の和であるから、(13)式は、

$$u(\vec{r},t)=A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \qquad (14)$$

と表現することができる。 この波動はスカラー波動方程式、

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \qquad (15)$$

を満たす。

さて、ここで、複素表示を用いると（exp の実数部のみ有効という置き換え）、

$$u(\vec{r},t)=A\exp\{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\} \qquad (16)$$

とすることができる。また、多数の光波の干渉等を考える場合、自ずと同一の光源から発した光波の重ね合わせについて、同時刻において考えなければならないので、光学では空間成分のみを問題にする場合が多い。(16) 式から時間依存項を省略すると、

$$u(\vec{r})=A\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) \qquad (17)$$

と表現できる。

３． 参考文献

１） M.Born & E.Wolf：光学の原理Ⅲ、第 7 版/草川徹訳（東海大学出版会、東京、2005）
２） 石黒浩三：光学（共立出版、東京、1953）
３） 小瀬輝次：フーリエ結像論（共立出版, 東京, 1979）
４） 草川 徹：レンズ設計者のための波面光学（東海大学出版、東京、1976）
５） 村田和美：光学（サイエンス社、東京、1979）

６）　谷田貝豊彦：光とフーリエ変換(朝倉書店、東京、1992)
７）　牛山善太：波動光学エンジニアリングの基礎（オプトロニクス社、東京、2005)