光学設計ノーツ 63 （ver. 1. 1）

導体中の光波の進行・複素屈折率

前回は波数 k のより一般的な表示を行う際に必要になる、吸収などを含む、導体中の光波の挙動を表現する方程式について考えたが、今回はその結果を用いて、導体中の光波の進行について、また複素屈折率について解説させていただく。

１． 複素屈折率

ここまでは、多くの場合には電荷を含まず、電場を加えても電流が生じない媒質、誘電体の境界面における反射・屈折について考えてきたが、ここでは導体境界面における反射について考えてみよう。

等方で均一な誘電体中におけるマクスウェルの方程式から、各周波数 ω、透磁率 μ、誘電率 ε を用いて以下のヘルムホルツ方程式が導ける（本連載 62 回(15)式)。

$$\nabla^2 \vec{E} + \mu\varepsilon\omega^2 \vec{E} = 0 \qquad (1)$$

しかし、導体中においては(1)式は、電流が生じることに付随した導電率 σ を用いて、以下の様に表すことができる。

$$\nabla^2 \vec{E} + \mu\omega^2 \left(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} = 0 \qquad (2)$$

この(2)式は本連載、前回の(16)式と同様の式である。ここで、(1),(2)式の比較において複素誘電率(complex dielectric constant) $\hat{\varepsilon}$ なるものを、複素比誘電率 $\hat{\varepsilon}_r$ 、真空中の誘電率 ε_0 を用いて、

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}_r = \varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega} \qquad (3)$$

と定義したことを思い出して戴きたい。(2)式においては誘電率を、この複素誘電率に形式的に置き換えることにより(1)式と同様なものとして考えることが出来る。これに付随して、複素位相速度（complex phase velocity）、

$$\hat{v} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \hat{\varepsilon}_r}} \qquad (4)$$

そして、複素屈折率（complex refractive index）なども定義されて、

$$\hat{n} = \frac{c_0}{\bar{v}} = \sqrt{\mu_r \hat{\varepsilon}_r} \qquad (5)$$

となる。また、複素屈折率は消衰係数（attenuation index）κ を用いて、以下のように表わす。

$$\hat{n} = n(1 - i\kappa) \qquad (6)$$

ここで、(3), (5)式から、 $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ であるから

$$\hat{n}^2 = \mu_r \hat{\varepsilon}_r = \mu_r \left(\varepsilon_r - i\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) \qquad (7)$$

(6)式を 2 乗して、σ は十分に長い波長に対しては、実数と看做すことができるので、(7)式と実部、虚部を比較すれば、

$$n^2(1 - \kappa^2) = \mu_r \varepsilon_r \qquad (8)$$

$$2n^2\kappa = \frac{\mu_r \sigma}{\omega \varepsilon_0} \qquad (9)$$

が得られる。(9)、(8)式からκを消去すると、

$$n^4 - \mu_r \varepsilon_r n^2 - \frac{\mu_r^2 \sigma^2}{4\omega^2 \varepsilon_0^2} = 0$$

よって、根の方程式より、

$$n^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{{\mu_r}^2 {\varepsilon^2}_r + \frac{\mu_r^2 \sigma^2}{\omega^2 \varepsilon_0^2}} + \mu_r \varepsilon_r \right) \qquad (10)$$

また、この結果と(8)式より、

$$n^2\kappa^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{{\mu_r}^2 {\varepsilon^2}_r + \frac{\mu_r^2 \sigma^2}{\omega^2 \varepsilon_0^2}} - \mu_r \varepsilon_r \right) \qquad (11)$$

が得られる。ｎとκが実数であるので(10),(11)式左辺は正となり、平方根の符号は正が選択される。

2. 導体中の光波の進行

さて、ここで、単に、導体中、x 軸方向に進む平面波を考えよう。ここで、複素波数 (complex wave number) $\hat{k}_n$ なるものを考えれば、もともと波数 k_n は,真空中の波数 k を用いて、

$$k_n = \frac{\omega}{v_n} = \frac{\omega n}{c_0} = kn \qquad (12)$$

と表わせるので、

$$\hat{k}_n = k\hat{n} = kn(1 - i\kappa) \qquad (13)$$

なる値を

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[-i(kx - \omega t)]$$

に導入して、

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(-\hat{k}_n x + \omega t)]$$

(13)式より、

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(-knx + ikn\kappa x + \omega t)]$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(-knx + \omega t) - kn\kappa x]$$

従って、

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-kn\kappa x)\exp[i(-knx + \omega t)] \qquad (14)$$

とすることができる。(14) 式中、第二の指数項は x 方向への平面波を表わすが、第一項は x の増大に伴い振幅 $\boldsymbol{E}_0$ を減衰させる働きを行なっている。κ が消衰係数と呼ばれる所以である。

金属内に入った光波の振幅が 1/e に減衰する距離（ 表皮深さ ）を x_d とすれば、(14)式から簡単に、

$$kn\kappa x_d = 1$$

なる条件が必要なことが分かり、

$$x_d = \frac{1}{kn\kappa} = \frac{\lambda}{2\pi n\kappa} \qquad (15)$$

となるので、(11)式の結果から、x_d の値を得ることが出来る。完全導体中、導電率 $\sigma \to \infty$ となれば $x_d \to 0$ となることが理解できる。斯様に、導体内、特に金属内に入り込む光は、急速に吸収され（全反射の場合と異なる)、減衰するので我々は金属境界面においての現象としては反射を、主に考慮することになる。

因みに、誘電体では電導率 $\sigma \to 0$ となるため(10),(11)式において、

$$n^2 = \mu_r \varepsilon_r \qquad (16A)$$

$$n^2\kappa^2 = 0 \qquad (16B)$$

となるが、実在の導体に於いて電導率 σ は、これらの間の有限の値をとる。

3. 参考文献

[1] M.Born & E.Wolf : Principles of Optics, 6th edition (Pergamon Press, Oxford,1993)
／草川徹、横田英嗣訳：光学の原理（東海大学出版会, 1977), pp.237- 239.
[2] 辻内順平：光学概論 I （朝倉書店、東京、1979）, pp.42- 46.
[3] 龍岡静夫：光工学の基礎（昭晃堂、東京、1990）, pp.171-172.
[4] 牛山善太：波動光学エンジニアリングの基礎（オプトロニクス、東京、2005）.

執筆者：牛山 善太
博士（工学）
元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師
(株)タイコ 代表取締役
(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供：
株式会社オプティカルソリューションズ
TEL: **03-5833-1332**
Mail: info@osc-japan.com
Web: http://www.osc-japan.com
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階