光学設計ノーツ 67 （ver. 1. 0）

体積ホログラムの回折効率を考える　4

引き続いて厚さのある体積ホログラム(thick hologram)の回折効率(diffraction efficiency)を考察すべく、H.Kogelnik、参考文献[1]の結合モード理論（coupled- mode theory）（或いは結合波理論(coupled-wave theory)について解説させていただきたい。

なお、こまでと同様に本項においても参考文献[1]及び、その解説が記されている参考文献[4][5][6][7]を主に参照させて戴いている。

1.　ブラッグの条件

前回では(11)式において二つの光波の位相波数ベクトルの間にある、

$$\left|\vec{\rho}\right| = \left|\vec{\sigma}\right| = B \qquad (66-11)$$

の関係が得られた。よって、(64-12) 式

$$\vec{\sigma} = \vec{\rho} - \vec{K} \qquad (64-12)$$

からも図１の様な状態が考えられる。ブラッグの条件が成立せねば（66-11）式も成立しない。ブラッグの条件を満たす入射角と波長を θ_0、λ_0 として、そこからの小さいずれを考え、

$$\theta = \theta_0 + \Delta\theta$$
$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda \qquad (1)$$

と表わす。そこで、ブラッグの条件を表す、前回の(7)式、

$$\cos(\phi-\theta)=\frac{K\lambda}{4\pi n_0} \qquad (66\text{-}7)$$

を微分して、

$$\frac{4\pi n_0\cos(\phi-\theta)}{d\theta}=\frac{K\lambda}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\theta}$$

ブラッグ条件を満たすθ_0、λ_0を用いて

$$4\pi n_0\sin(\phi-\theta_0)\Delta\theta=K\Delta\lambda \qquad (2)$$

と、出来る。ここで、本連載 65 回(9)式、

$$k^2=B^2+4\kappa B\cos\left(\vec{K}\cdot\vec{r}\right)-i2B\alpha \qquad (65\text{-}9)$$

を

$$k^2=B^2-i2B\alpha+2\kappa B\left\{\exp\left(i\vec{K}\vec{r}\right)+\exp\left(-i\vec{K}\vec{r}\right)\right\} \qquad (3)$$

とおいて、本連載６４回(18)式、

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0 \qquad (64-18)$$

に代入し、さらに、光波の表現式、

$$E\left(\vec{r}\right)=R(z)\exp\left(-i\vec{\rho}\cdot\vec{r}\right)+S(z)\exp\left(-i\vec{\sigma}\cdot\vec{r}\right)$$

(64－10)

そして(64-12)式の関係を用いて計算すると、( )”、( )’ がそれぞれz方向の 2 次微分、1 次微分を表しているとして、

$$\nabla^2 \vec{E} = \left(\frac{1}{2} R' \exp\left[-i\{\vec{\rho}\cdot\vec{r}\} \right] + \frac{1}{2} R \{-i\rho_z\} \exp\left[-i\{\vec{\rho}\cdot\vec{r}\} \right] \right)' + \text{c.c.}$$

$$= \frac{1}{2} R'' \exp\left[-i\{\vec{\rho}\cdot\vec{r}\} \right] + \frac{1}{2} R' \{-i\rho_z\} \exp\left[-i\{\vec{\rho}\cdot\vec{r}\} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} R' \exp\left[-i\{\vec{\rho}\cdot\vec{r}\} \right] + \frac{1}{2} R \{-i\vec{\rho}\}^2 \exp\left[-i\{\vec{\rho}\cdot\vec{r}\} \right] + \text{c.c.}$$

$$+ \frac{1}{2} S'' \exp\left[-i\{\vec{\sigma}\cdot\vec{r}\} \right] + \frac{1}{2} S' \{-i\sigma_z\} \exp\left[-i\{\vec{\sigma}\cdot\vec{r}\} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} S' \exp\left[-i\{\vec{\sigma}\cdot\vec{r}\} \right] + \frac{1}{2} S \{-i|\sigma|\}^2 \exp\left[-i\{\vec{\sigma}\cdot\vec{r}\} \right] + \text{c.c.}$$

$$= \frac{1}{2} \left(R'' - 2R' i\rho_z - R|\vec{\rho}|^2 \right) \exp\left[-i\{\vec{\rho}\cdot\vec{r}\} \right] + \text{c.c.}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(S'' - 2S' i\sigma_z - S|\sigma|^2 \right) \exp\left[-i\{\vec{\sigma}\cdot\vec{r}\} \right] + \text{c.c.} \qquad (4)$$

となる。

ところで、上式における c.c. は複素共役（ complex conjugate ）を表す項であり、 z を複素数とすれば、

$$z + \text{c.c.} = 2\,\mathrm{Re}[z]$$

である。

話を戻せば、また、

$$k^2\vec{E}=\left[B^2-i2B\alpha+2\kappa B\left\{\exp\left(i\vec{K}\vec{r}\right)+\exp\left(-i\vec{K}\vec{r}\right)\right\}\right]$$

$$\times\left\{R\exp\left(i\vec{\rho}\cdot\vec{r}\right)+S\exp\left(i\vec{\sigma}\cdot\vec{r}\right)\right\}$$

$$=\left(B^2-i2B\alpha\right)R\exp\left(i\vec{\rho}\cdot\vec{r}\right)+\left(B^2-i2B\alpha\right)S\exp\left(i\vec{\sigma}\cdot\vec{r}\right)$$

$$+2\kappa B\left[\exp i\left(\vec{\rho}-\vec{\sigma}\right)\vec{r}+\exp\left[-i\left(\vec{\rho}-\vec{\sigma}\right)\vec{r}\right]\right]\left\{R\exp\left(i\vec{\rho}\cdot\vec{r}\right)+S\exp\left(i\vec{\sigma}\cdot\vec{r}\right)\right\}$$

$$=\left(B^2R-i2B\alpha R\right)\exp\left(i\vec{\rho}\cdot\vec{r}\right)+\left(B^2S-i2B\alpha S\right)\exp\left(i\vec{\sigma}\cdot\vec{r}\right)$$

$$+2\kappa B\left[R\exp i\left(2\vec{\rho}-\vec{\sigma}\right)\vec{r}+R\exp\left[i\vec{\sigma}\cdot\vec{r}\right]+S\exp\left(-i\left(\vec{\rho}-2\vec{\sigma}\right)\vec{r}+S\exp\left(i\vec{\rho}\cdot\vec{r}\right)\right)\right]$$

ここで、二つの exp の項が自由に変わり、その場合にも(64-18)式が成立するためには、それぞれの係数について以下の関係が成立する必要があって、この時、$\vec{\rho}+\vec{K}$ 、$\vec{\sigma}$ - $\vec{K}$ 方向への波動はより高次の波動と同様に無視するとして（(64-12) 式参照のこと）[1]、

$$R''-2R'i\rho_z-R\left|\rho\right|^2+B^2R-i2B\alpha R+2\kappa BS=0 \qquad (6)$$

$$S''-2S'i\sigma_z-S\left|\sigma\right|^2+B^2S-i2B\alpha S+2\kappa BR=0 \qquad (7)$$

ここで、(6)式においては

$$\left|\rho\right|^2=B^2$$

とおけて、

$$R'' - 2R'i\rho_z - i2B\alpha R + 2\kappa BS = 0 \qquad (8)$$

ところが、Bragg 条件を満たしていない状況を考えれば、(66-11)式は成立せず、(7)式についてはそのまま

$$S'' - 2S'i\sigma_z + \left(B^2 - |\sigma|^2\right)S - i2B\alpha S + 2\kappa BR = 0 \qquad (9)$$

なる関係が得られる。

２． 参考文献

[1] Kogelnik, *Bell Sys.Tech. J.*, **48**, 2909 (1969).

[2] A.Yariv：光エレクトロニクス展開編/多田邦夫、
神谷武志監訳（丸善、東京、2002）, p.676.

[3] M.Born & E.Wolf :Principles of Optics,6th edition(Pergamon Press, Oxford,1993)
／草川徹、横田英嗣訳：光学の原理（東海大学出版会、1977）.

[4] J.W.Goodman: Introduction to Fourier Optics 2nd.edi. (McGraw-Hill, NewYork, 1996), p.336

[5] J.W.Goodman : フーリエ光学 / 尾崎義治、朝倉利光 訳（森北出版、東京、2012）, p.326.

[6] 辻内順平：ホログラフィー（裳華房、東京、1997）, p.56.

[7] P.Hariharan: Optical Holography Principles, techniques and applications,2nd.edi.
(Cambridge University Press, Cambridge, 1996), p.48.

[8] 辻内順平：光学概論 I （朝倉書店、東京、1979）.

[9] 牛山善太：波動光学エンジニアリングの基礎（オプトロニクス、東京、2005）.

執筆者：牛山 善太
博士（工学）
元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師
(株)タイコ 代表取締役
(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供：
株式会社オプティカルソリューションズ
TEL: **03-5833-1332**
Mail: info@osc-japan.com
Web: http://www.osc-japan.com
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階