光学設計ノーツ 64 (ver. 1.3)

体積ホログラムの回折効率を考える 1

今回から数回に分けて、いよいよ厚さのある体積ホログラムの回折効率について考えさせていただきたい。今回は体積のある媒質内での干渉縞の形成について検討し、そしてそこに再生光を照射し、信号光を再生することを考える。

1. 厚いホログラム内の平面波による干渉縞

本連載 61 回とまったく同様にして、物体波ならびに参照波がともに平面波であって、感光材内の波数ベクトルをそれぞれ、$\boldsymbol{k_1}$、$\boldsymbol{k_2}$とし、これら二つの波動の合成波は $\boldsymbol{r}$ を位置ベクトルとして、

$$u = A_1 \exp\left\{-i\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right\} + A_2 \exp\left\{-i\left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right\} \tag{1}$$

と表現できる。従って、これも 61 回と同様に導いて、強度は以下の振幅の絶対値の$= \pi r^2$乗に比例して、

$$\left|u(x,y)\right|^2 = \left|A_1 \exp\left\{-i\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right\} + A_2 \exp\left\{-i\left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right\}\right|^2 \tag{2}$$

$$= \left[A_1 \exp\left\{-i\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right\} + A_2 \exp\left\{-i\left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right\}\right] \times \left[A_1 \exp\left\{-i\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right\} + A_2 \exp\left\{-i\left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right\}\right]^*$$

従って、

$$I(x,y)=A_1{}^2+A_2{}^2+2A_1A_2\cos\{(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{r}\}\tag{3}$$

となる。ここで、この干渉縞が媒質内の屈折率の変化により記録されると考える。そしてその屈折率が上式でもたらされる光の強度に比例すると仮定する。(3)式右辺第一項、第二項はそれぞれ参照光、物体光の単独の強度、バックグラウンドを表すので、これを基本の屈折率 n_0 とおけば、屈折率の分布は、(3)式から以下の如くに表すことができる。

$$n(\vec{r})=n_0+2A_1A_2\cos\{(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{r}\}\tag{4}$$

さらに、

$$n_1\propto A_1A_2$$

$$\vec{k}=\vec{k}_1-\vec{k}_2\tag{5}$$

とおけば、(4)式より、

$$n(\vec{r})=n_0+n_1\cos\{\vec{k}\cdot\vec{r}\}\tag{6}$$

と出来る。この式がホログラムの屈折率分布を表す。光波の吸収を想定して吸収定数を α とすると、

$$\alpha(\vec{r})=\alpha_0+\alpha_1\cos\{\vec{k}\cdot\vec{r}\}\tag{7}$$

と考えられる。

一般的な表示として、波数は媒質による吸収も考慮した場合、複素数になると考えられ、λ_0を真空中の波長、αを吸収係数として、

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0} n + i\alpha \tag{8}$$

と、置ける[5]。ここで、屈折率 n については、

$$n\lambda = \lambda_0$$

である。

2. 信号光再生の検討

本連載第 61 回において、回折光が現れる条件、Bragg の条件について記したが、この参照光によって回折波が発生している場、回折格子内の波動場 E は以下の様に表記できるであろう。

$$E(\vec{r}) = A_1(\vec{r})\exp\left(-i\vec{k}_1\vec{r}\right) + A_2(\vec{r})\exp\left(-i\vec{k}_2\vec{r}\right) \tag{9}$$

ホログラムは十分に厚いと仮定し、存在するのは k_1 方向に進む再生のための再生波、そして右辺第 2 項で表わされる Bragg 条件と整合する回折次数を持った波動（回折波）の二つであると考える。

これを以下の様に最大振幅と波数ベクトルを書き換えて表現する。

$$E(\vec{r}) = R(z)\exp\left(-i\vec{\rho}\cdot\vec{r}\right) + S(z)\exp\left(-i\vec{\sigma}\cdot\vec{r}\right) \tag{10}$$

この時,(5)式と同様に、

$$\vec{k} = \vec{\rho} - \vec{\sigma} \tag{11}$$

である。従って回折波の波数は以下の様に表される。

$$\vec{\sigma} = \vec{\rho} - \vec{k} \qquad (12)$$

さて、話を戻せば、この時、等方で均一な誘電体中におけるマクスウェルの方程式から、各周波数 ω、透磁率 μ、誘電率 ε を用いて本連載 63 回（1）式にある様に、以下のヘルムホルツ方程式が導ける。

$$\nabla^2 \vec{E} + \mu\varepsilon(\vec{r})\omega^2 \vec{E} = 0 \qquad (13)$$

ここに、

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_0 n^2(r) \qquad (14)$$

であるので、

$$\mu\varepsilon(r)\omega^2 = \mu\varepsilon_0 n^2(r)\omega^2 \qquad (15)$$

であって、

$$\mu\varepsilon(r)\omega^2 = \mu\varepsilon_0 \frac{n^2(r)\omega^2}{c_0^2} c_0^2 \qquad (16)$$

$$\mu\varepsilon(r)\omega^2 = \mu\varepsilon_0 k^2 c_0^2 \qquad (17)$$

さらに

$$\mu\varepsilon_0 \approx \frac{1}{c_0^2}$$

なので、

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \qquad (18)$$

と言う式に(13)式は戻る。この式を基に以下、厚いホログラムにおける光波の再生について考えて行こう。

3. 参考文献

[1] A.Yariv：光エレクトロニクス展開編/多田邦夫、
神谷武志監訳（丸善、東京、2002），p.676.

[2] Kogelnik, *Bell Sys.Tech. J*., **48**, 2909 (1969).

[3] M.Born & E.Wolf :Principles of Optics,6th edition(Pergamon Press, Oxford, 1993)
／草川徹、横田英嗣訳：光学の原理（東海大学出版会, 1977).

[4] J.W.Goodman: Introduction to Fourier Optics 2nd.edi. (McGraw-Hill, NewYork, 1996), p.336.

[5] J.W.Goodman : フーリエ光学 / 尾崎義治、朝倉利光 訳（森北出版、東京、2012）, p.326.

[6] 辻内順平：ホログラフィー（裳華房、東京、1997），p.56.

[7] P.Hariharan: Optical Holography Principles, techniques and applications, 2nd.edi.
(Cambridge University Press, Cambridge, 1996), p.48.

[8] 辻内順平：光学概論 I （朝倉書店、東京、1979）.

[9] 牛山善太：波動光学エンジニアリングの基礎（オプトロニクス、東京、2005）.

執筆者：牛山 善太
博士（工学）
元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師
(株)タイコ 代表取締役
(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供：
株式会社オプティカルソリューションズ
TEL: **03-5833-1332**
Mail: info@osc-japan.com
Web: http://www.osc-japan.com
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階