

光学設計ノーツ 65 (ver. 1.2.1)

体積ホログラムの回折効率を考える 2

前回から厚さのある体積ホログラム(thick hologram)の回折効率(diffraction efficiency)について考えさせて戴いている。今回からは数回に分けて厚さを持つホログラムを解析する際に有益で、多く用いられる H.Kogelnik、参考文献[1]の結合モード理論(coupled-mode theory) (或いは結合波理論(coupled-wave theory))について解説させていただきたい。

薄いホログラムの場合と異なり厚いホログラム内では光波の挙動は複雑であり(入射光は減衰し、射出光は増大することが計算に採り入れられていなくてはならない)、openでFarField的な回折計算は上手く適応できない。そこで、Maxwellの電磁方程式に対して適切に近似を用いる結合モード理論により比較的簡便に回折効率を計算することができ、Braggの条件からのホログラム再生のための再生光の角度、あるいは波長の誤差の許容量も得られる。

また、本連載第61回で触れさせていただいた様に、十分に厚いホログラムにおいてBragg条件が成立する場合には、薄い場合と異なり、多くの回折次数の回折波はBragg条件を満たさないため極端に減衰していき無視できるものとなる。従って、Bragg条件の角度(或いは波長)に近い参照波が用いられた場合には入力の参照光と出力の信号波のみ考慮に入ればよい事になる。これも結合モード理論の重要なポイントである。

なお、本項においては参考文献[1]の解説が記されている参考文献[4][5][6][7]も参照させて戴いている。

1. 結合モード理論・吸収率、屈折率変化の近似のための仮定

前回本連載 64 回における諸元において以下の様な大小関係が成立していると考える。

$$\frac{2\pi}{\lambda} n_0 \gg \alpha_0$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} n_0 \gg \alpha_1 \quad (1)$$

$$n_0 \gg n_1$$

α は吸収係数 (absorption constant) であり、 n_0 はバックグラウンドの平均屈折率である。 n_1 , α_1 は干渉による屈折率、或いは吸収係数の変調の最大振幅を表す。因みに n_1 は、干渉による最大振幅と

$$n_1 \propto A_1 A_2$$

なる関係にある。

(1) 式の条件においては、吸収係数 α は振幅が $1/e$ に低下する伝達距離の逆数として参考文献[4]では用いられているので、1 波長分程度の距離における吸収は非常に小さいことを、また、屈折率の変化は全体の平均値より遥かに小さいことを仮定している。

2. 結合モード理論・一般的な波数の表現

本連載 62 回(16)式、

$$\nabla^2 \bar{E} + \omega^2 \varepsilon \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right) \mu \bar{E} = 0 \quad (62-16)$$

64 回(18)式、

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (64-18)$$

を比較して、結合モード理論のために波数の表現する一般的な形として誘電率 ϵ 、透磁率 μ 、電気伝導率 σ 、角周波数 ω を用いて、

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right) \mu \quad (2)$$

と出来る。さらに、

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu - i \omega \mu \sigma \quad (3)$$

ここで、比誘電率 ϵ_r 、比透磁率 μ_r を考えると、

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (4)$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

従って

$$\begin{aligned} \epsilon \mu &= \epsilon_r \epsilon_0 \times \mu_r \mu_0 \\ &= \frac{\epsilon_r \mu_r}{c^2} \end{aligned} \quad (5)$$

従って(3)式は

$$k^2 = \omega^2 \frac{\epsilon_r \mu_r}{c^2} - i\omega\mu\sigma \quad (6)$$

μ_r は一般的に1とおけるので、簡便のため以降、比誘電率を ϵ と表わせば、(6)式は

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - i\omega\mu\sigma \quad (7)$$

比誘電率、電気伝導率に、前回64回における(6),(7)式と同様の形で(ここでの ϵ_0 は比誘電率の変化の中心値を表す)、

$$\epsilon(\vec{r}) = \epsilon_0 + \epsilon_1 \cos\{\vec{k} \cdot \vec{r}\} \quad (8)$$

$$\sigma(\vec{r}) = \sigma_0 + \sigma_1 \cos\{\vec{k} \cdot \vec{r}\} \quad (9)$$

なる関係が成立する。

さて、ここで(7)式に(8)(9)式を代入すれば、

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) - i\{\omega\mu\sigma_0 + \omega\mu\sigma_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r})\}$$

となり、計算して行って、

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 + \sqrt{\epsilon_0} \left[\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon_1}{\sqrt{\epsilon_0}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) - i \frac{\omega\mu\sigma_1}{\sqrt{\epsilon_0}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) \right] - i\omega\mu\sigma_0$$

となる。ここでさらに、平均吸収係数 α 、平均波数 B 、

$$\alpha = \frac{\mu c \sigma_0}{2\sqrt{\epsilon_0}} \quad (6)$$

$$B = \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_0}}{\lambda} \quad (7)$$

さらに、結合係数 (coupling constant) κ 、

$$\kappa = \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi\epsilon_1}{\lambda\sqrt{\epsilon_0}} - i \frac{\mu c \sigma_1}{\sqrt{\epsilon_0}} \right) \quad (8)$$

を導入する。

(5)式を、これらの係数を鑑み、

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 + \sqrt{\epsilon_0} \frac{\omega}{c} \left[\frac{\omega}{c} \frac{\epsilon_1}{\sqrt{\epsilon_0}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) - i \frac{\mu c \sigma_1}{\sqrt{\epsilon_0}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) \right] - i \frac{2\pi}{\lambda} c \mu \sigma_0$$

と変形すれば

$$k^2 = B^2 + 4\kappa B \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) - i2B\alpha \quad (9)$$

なる関係が直ちに得られる。

3. 参考文献

- [1] Kogelnik, *Bell Sys.Tech. J.*, **48**, 2909 (1969).
- [2] A.Yariv : 光エレクトロニクス展開編/
多田邦夫、神谷武志監訳 (丸善、東京、2002) , p.676.
- [3] M.Born & E.Wolf : Principles of Optics,6th edition(Pergamon Press, Oxford, 1993)
／草川徹、横田英嗣訳 : 光学の原理 (東海大学出版会, 1977).
- [4] J.W.Goodman:Introduction to Fourier Optics 2nd.edi. (McGraw-Hill, NewYork, 1996), p.336.
- [5] J.W.Goodman : フーリエ光学 / 尾崎義治、朝倉利光 訳 (森北出版、東京、2012) , p.326.
- [6] 辻内順平 : ホログラフィー (裳華房、東京、1997) , p.56.
- [7] P.Hariharan: Optical Holography Principles, techniques and applications,2nd.edi.
(Cambridge University Press, Cambridge, 1996), p.48.
- [8] 辻内順平 : 光学概論 I (朝倉書店、東京、1979) .
- [9] 牛山善太 : 波動光学エンジニアリングの基礎 (オプトロニクス、東京、2005) .

執筆者 : 牛山 善太

博士 (工学)

元東海大学工学部光・画像工学科 (レンズ設計) 非常勤講師

(株)タイコ 代表取締役

(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供 :

株式会社オプティカルソリューションズ

TEL: **03-5833-1332**

Mail: info@osc-japan.com

Web: <http://www.osc-japan.com>

〒101-0032

東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階