光学設計ノーツ 68 (ver. 1.0)

体積ホログラムの回折効率を考える 5

今回も引き続いて厚さのある体積ホログラム(thick hologram)の回折効率(diffraction efficiency)を考察すべく、H.Kogelnik、参考文献[1]の結合モード理論(coupled- mode theory)（或いは結合波理論(coupled-wave theory)について解説させていただきたい。

なお、参考文献[1]とともに、その解説が丁寧に記されている貴重な邦文である参考文献[6]を参照させて戴いている。

1. Coupled-wave 方程式の導出

64 回（12）式、

$$\vec{\sigma} = \vec{\rho} - \vec{K} \qquad (64-12)$$

から、

$$B^2 - \left|\vec{\sigma}\right|^2 = B^2 - \left|\vec{\rho} - \vec{K}\right|^2$$

$$= B^2 - \left|\vec{\rho}\right|^2 + 2\vec{\rho}\cdot\vec{K} - \left|\vec{K}\right|^2$$

66 回(11)式の関係より、

$$= 2\vec{\rho}\cdot\vec{K} - \left|\vec{K}\right|^2$$

$$= 2\left|\vec{\rho}\right|\left|\vec{K}\right|\cos(\phi - \theta) - K^2$$

67 回（1）式の関係から、

$$=2\left|\vec{\rho}\right|\left|\vec{K}\right|\cos\left\{\left(\phi-\theta_0\right)-\Delta\theta\right\}-K^2 \qquad (1)$$

ここで、

$$\cos\{(\phi-\theta_0)-\Delta\theta\}$$

$$=\cos(\phi-\theta_0)\cos\Delta\theta+\sin(\phi-\theta_0)\sin\Delta\theta$$

$$\approx\cos(\phi-\theta_0)+\sin(\phi-\theta_0)\Delta\theta$$

さらに本連載 66 回(7)式の関係が θ_0 に対して成立するので

$$=\frac{K\lambda}{4\pi n_0}+\sin(\phi-\theta_0)\Delta\theta$$

また、これまでに導入している平均波数 B は、

$$B=\frac{2\pi}{\lambda}n_0$$

であるから、

$$\cos\{(\phi-\theta_0)-\Delta\theta\}=\frac{K}{2B}+\Delta\theta\sin\left(\phi-\theta_0\right) \qquad (2)$$

となる。従って(1)式は、

$$B^2-\sigma^2=2\rho K\left\{\frac{K}{2B}+\Delta\theta\sin(\phi-\theta_0)\right\}-K^2$$

$$=\frac{\rho K^2}{B}+2|\vec{\rho}||\vec{K}|\Delta\theta\sin(\phi-\theta_0)-K^2$$

$$=2|\vec{\rho}||\vec{K}|\Delta\theta\sin(\phi-\theta_0)$$

$$=2BK\Delta\theta\sin(\phi-\theta_0) \qquad (3)$$

と成る。　ここで、

$$\vartheta=\frac{B^2-\sigma^2}{2B} \qquad (4)$$

なる Bragg 条件からのずれを表す系数を導入すれば、上記(3)式より、

$$\vartheta=\frac{2BK\Delta\theta\sin(\phi-\theta_0)}{2B}=K\Delta\theta\sin(\phi-\theta_0)$$

そして連載前回(2)式、

$$4\pi n_0\sin(\phi-\theta_0)\Delta\theta=K\Delta\lambda \qquad (67-2)$$

より、平均屈折率を改めて n と表わせば、

$$\vartheta=\frac{K^2\Delta\lambda}{4\pi n} \qquad (5)$$

と出来る。ここで、前回(8)(9)式、

$$R'' - 2R' i\rho_z - i2B\alpha R + 2\kappa BS = 0 \qquad (67\text{-}8)$$

$$S'' - 2S' i\sigma_z + \left(B^2 - |\sigma|^2\right)S - i2B\alpha S + 2\kappa BR = 0 \qquad (67\text{-}9)$$

において、2 次微分の項を無視して、(67-8) 式は

$$-2R' i\rho_z - i2B\alpha R + 2\kappa BS = 0$$

辺々に$\frac{i}{2}$を乗じて、

$$R'\rho_z + B\alpha R + i\kappa BS = 0$$

$$R'\frac{\rho_z}{B} + \alpha R + i\kappa S = 0 \qquad (6)$$

(67-9)式は

$$-2S' i\sigma_z + \left(B^2 - |\sigma|^2\right)S - i2B\alpha S + 2\kappa BR = 0$$

辺々に$\frac{i}{2}$を乗じて、

$$S'\sigma_z + \frac{i}{2}\left(B^2 - |\sigma|^2\right)S + B\alpha S + i\kappa BR = 0$$

$$S'\frac{\sigma_z}{B}+\frac{i}{2B}\left(B^2-\left|\sigma\right|^2\right)S+\alpha S+i\kappa R=0 \qquad (7)$$

(4)式より、

$$S'\frac{\sigma_z}{B}+\left(i\vartheta+\alpha\right)S+i\kappa R=0 \qquad (8)$$

ここで、以下の係数、

$$c_R=\frac{\rho_z}{B}=\cos\theta \qquad (9.1)$$

$$c_S=\frac{\sigma_z}{B}=\cos\theta-\frac{K}{B}\cos\phi \qquad (9.2)$$

を導入して、(6)(8)式は、

$$c_R R'+\alpha R=-i\kappa S \qquad (10.1)$$

$$c_S S'+\left(\alpha+i\vartheta\right)S=-i\kappa R \qquad (10.2)$$

となる。これら(10.1)(10.2)式が厚いホログラムにおいて回折効率を考えるための coupled-wave 方程式である。

２．　参考文献

[1]　Kogelnik, *Bell Sys.Tech. J.*, **48**, 2909 (1969).

[2]　A.Yariv：光エレクトロニクス展開編/多田邦夫、
神谷武志監訳（丸善、東京、2002）, p.676.

[3]　M.Born & E.Wolf :Principles of Optics,6th edition(Pergamon Press, Oxford,1993)
／草川徹、横田英嗣訳：光学の原理（東海大学出版会、1977）.

[4]　J.W.Goodman: Introduction to Fourier Optics 2nd.edi. (McGraw-Hill, NewYork, 1996), p.336

[5]　J.W.Goodman : フーリエ光学 / 尾崎義治、朝倉利光 訳（森北出版、東京、2012）, p.326.

[6]　辻内順平：ホログラフィー（裳華房、東京、1997）.

[7]　P.Hariharan: Optical Holography Principles, techniques and applications,2nd.edi.
(Cambridge University Press, Cambridge, 1996), p.48.

執筆者：牛山 善太
博士（工学）
元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師
(株)タイコ 代表取締役
(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供：
株式会社オプティカルソリューションズ
TEL: **03-5833-1332**
Mail: info@osc-japan.com
Web: http://www.osc-japan.com
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階