

## 光学設計ノーツ 69 (ver. 1.0)

## 体積ホログラムの回折効率を考える 6

今回も引き続き厚さのある体積ホログラム(thick hologram)の回折効率(diffraction efficiency)を考察すべく、H.Kogelnik、参考文献[1]の結合モード理論(coupled-mode theory) (或いは結合波理論(coupled-wave theory)について解説させていただきたい。今回は参照波、信号波を新たな形式で定義しその位相を得るための式を導出する。次回では回折効率の評価式に達する予定である。

なお、前回同様、参考文献[1]とともに、その解説が丁寧に記されている貴重な邦文である参考文献[6]を参照させて戴いている。

## 1. Coupled-wave 方程式と参照波、信号波の新たな表現

前回 (10.1) (10.2) 式、coupled-wave 方程式、

$$c_R R' + \alpha R = -i\kappa S \quad (68-10.1)$$

$$c_S S' + (\alpha + i\mathcal{G})S = -i\kappa R \quad (68-10.2)$$

なお、

$$\mathcal{G} = \frac{K^2 \Delta\lambda}{4\pi n}$$

を解くために参照波 R, 信号波 S を以下の通りに置く。

$$R(z) = r_1 e^{i\gamma_1 z} + r_2 e^{i\gamma_2 z} \quad (1)$$

$$S(z) = s_1 e^{i\gamma_1 z} + s_2 e^{i\gamma_2 z} \quad (2)$$

これら、(1)(2)式により複素空間を表現することができる。ここでの  $R, S$  は、重要な本連載 64 回の (10) 式における最大振幅項である。右辺第一項の波は再生波、或いは参照波であり、ホログラム中で回折と吸収により徐々に減衰し、第二項は再現される物体波を表す。この時、本連載 64 回 (10) 式における様に波動場を表現し、厚いホログラム内ではこれら二つの光波のみしか存在しないと考えている。

$$E(\vec{r}) = R(z)\exp(-i\vec{\rho} \cdot \vec{r}) + S(z)\exp(-i\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) \quad (64-10)$$

さて、 $r_1, r_2, s_1, s_2$  は境界条件により独立に決まる定数である。(68-10.1)式に(1),(2)式を代入すれば、

$$\begin{aligned} c_R \{r_1 \gamma_1 \exp(\gamma_1 z) + r_2 \gamma_2 \exp(\gamma_2 z)\} + \alpha \{r_1 \exp(\gamma_1 z) + r_2 \exp(\gamma_2 z)\} \\ = -i\kappa \{s_1 \exp(\gamma_1 z) + s_2 \exp(\gamma_2 z)\} \end{aligned}$$

従って、 $m = 1, 2$  と表わして、

$$(c_R \gamma_m + \alpha) r_m = -i\kappa s_m \quad (3)$$

となる。さらに、(68-10.2)式に(1),(2)式を代入すれば、

$$\begin{aligned} c_S \{s_1 \gamma_1 \exp(\gamma_1 z) + s_2 \gamma_2 \exp(\gamma_2 z)\} + (\alpha + i\mathcal{G}) \{s_1 \exp(\gamma_1 z) + s_2 \exp(\gamma_2 z)\} \\ = -i\kappa \{r_1 \exp(\gamma_1 z) + r_2 \exp(\gamma_2 z)\} \end{aligned}$$

ここでも、 $m = 1, 2$  と表わして、

$$(c_S \gamma_m + \alpha + i\mathcal{G}) s_m = -i\kappa r_m \quad (4)$$

が得られる。

## 2. 位相係数を得る

さて、ここで、(3)(4)式の辺々を掛け合わせると、

$$(c_R \gamma_m + \alpha) r_m (c_S \gamma_m + \alpha + i \mathcal{G}) s_m = -\kappa^2 r_m s_m$$

であり、

$$(c_R \gamma_m + \alpha)(c_S \gamma_m + \alpha + i \mathcal{G}) = -\kappa^2 \quad (5)$$

となる。さらに計算して行って、

$$c_R c_S \gamma_m^2 + \gamma_m (\alpha c_R + \alpha c_S + i \mathcal{G} c_R) + \alpha^2 + i \alpha \mathcal{G} + \kappa^2 = 0 \quad (6)$$

この2次方程式を根の公式を用いて解けば、

$$\begin{aligned} \gamma_m = & -\frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{c_S} + \frac{\alpha}{c_R} + \frac{i \mathcal{G}}{c_S} \right) \\ & \pm \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\alpha}{c_S} + \frac{\alpha}{c_R} + \frac{i \mathcal{G}}{c_S} \right)^2 - 4 \left( \frac{\alpha^2 + i \alpha \mathcal{G} + \kappa^2}{c_R c_S} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式右辺、根号内を計算し、式の形を変えて、

$$\gamma_m = -\frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{c_S} + \frac{\alpha}{c_R} + \frac{i \mathcal{G}}{c_S} \right)$$

$$\pm \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\alpha}{c_R} \right)^2 - \frac{2\alpha}{c_R c_S} (\alpha + i\mathcal{G}) + \frac{(\alpha + i\mathcal{G})^2}{c_S} - \frac{4\kappa^2}{c_R c_S} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\gamma_m = -\frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{c_S} + \frac{\alpha}{c_R} + \frac{i\mathcal{G}}{c_S} \right) \pm \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\alpha}{c_R} - \frac{\alpha}{c_S} - \frac{i\mathcal{G}}{c_S} \right)^2 - \frac{4\kappa^2}{c_R c_S} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

なる式が得られる。

### 3. 参考文献

- [1] Kogelnik, *Bell Sys.Tech. J.*, **48**, 2909 (1969).
- [2] A.Yariv : 光エレクトロニクス展開編/多田邦夫、  
神谷武志監訳 (丸善、東京、2002) , p.676.
- [3] M.Born & E.Wolf :Principles of Optics,6th edition(Pergamon Press, Oxford,1993)  
／草川徹、横田英嗣訳 : 光学の原理 (東海大学出版会、1977) .
- [4] J.W.Goodman: Introduction to Fourier Optics 2<sup>nd</sup>.edi. (McGraw-Hill, NewYork, 1996), p.336.
- [5] J.W.Goodman : フーリエ光学 / 尾崎義治、朝倉利光 訳 (森北出版、東京、2012) ,p.326.
- [6] 辻内順平 : ホログラフィー (裳華房、東京、1997) .
- [7] P.Hariharan: Optical Holography Principles, techniques and applications,2<sup>nd</sup>.edi.  
(Cambridge University Press, Cambridge, 1996), p.48.
- [8] 辻内順平 : 光学概論 I (朝倉書店、東京、1979) .
- [9] 三好旦六 : 光・電磁波論 (培風館、東京、1995) .

執筆者 : 牛山 善太

博士 (工学)

元東海大学工学部光・画像工学科 (レンズ設計) 非常勤講師

(株)タイコ 代表取締役

(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供 :

**株式会社オプティカルソリューションズ**

TEL: **03-5833-1332**

Mail: [info@osc-japan.com](mailto:info@osc-japan.com)

Web: <http://www.osc-japan.com>

〒101-0032

東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階