

光学設計ノーツ 74 (ver. 1.0)

光線の構造 2

はじめに

前回に引き続き“光線の構造”について検討させて戴きたい。こうした内容は、近年、エタンデュという用語も頻繁に用いられる照明系設計・評価の際には振り返ってみるべき内容であり、Nonimaging Optics⁷⁾の基本と成る部分でもある。また、ここでは正弦条件以外に触れられなかったが、光学系の収差補正上の構造的な制約を知る上でも重要となる。

1. エタンデュと正弦条件

前回の検討においては二つの光斑が共役関係に無い一般的な場合を考えているが、光斑同士に共役関係がある場合には、前回図2に対して、図6、前回図3に対して図7を入れ替えて符号に注意して考えれば同様の導出が可能であり、

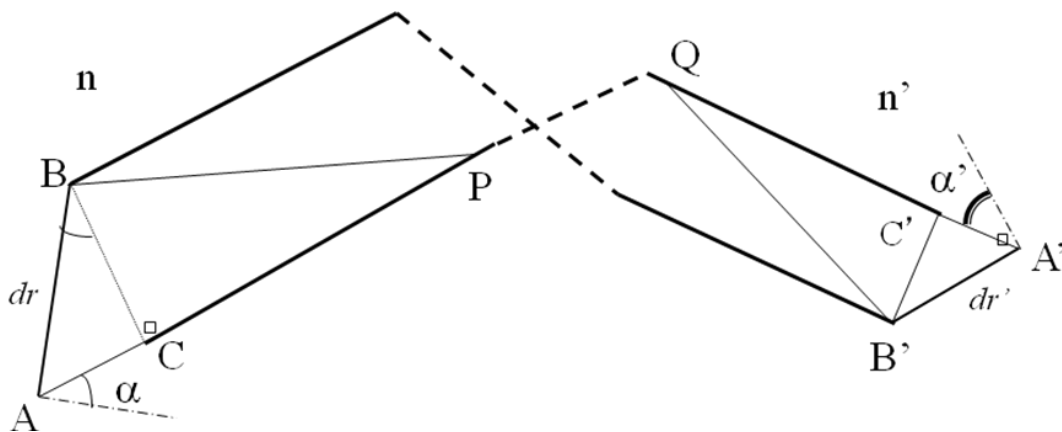


図6 フェルマーの原理より考察する光路差（共役結像の場合）

(10)式、一般化されたラグランジュの不変量

$$n^2 \cos \alpha dS d\Omega = n'^2 \cos \alpha' dS' d\Omega' \quad (73-10)$$

そのものが得られる。

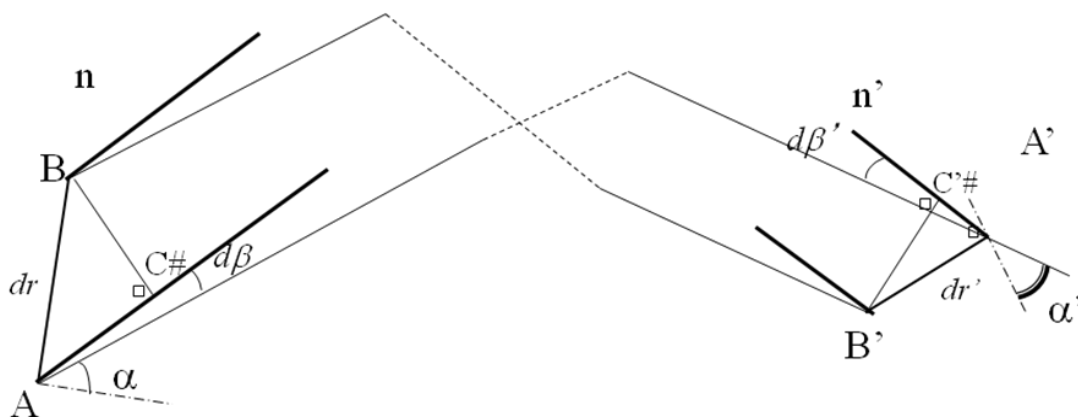


図 7 角度の異なる光線の光路差 (共役結像の場合)

(10)式から、物界と像界における輝度 B, B' についての関係,

$$B' = \frac{n'^2}{n^2} B \quad (11)$$

も得られる。空気中では光線に沿った細い光束内で輝度は保存される。

こうした微小な角度に対しては前回図 3 にある様な等位相面を導入して考えればメリディオナル面内で、非共役結像関係の場合を例にとれば図 8 の様な模式的な図が書ける。等位相面を介在して考えれば、各セクションの光路長を図 8 にあるように置いて、この場合(3)式より

$$\begin{aligned} [BB'] - (W+x) &= z - x \\ [BB'] &= z + W \end{aligned}$$

と成り

$$T + y = x + W \quad (12)$$

$$T + s = z + W \quad (13)$$

両辺引けば

$$y - x = s - z \quad (14)$$

と言う関係が得られる。

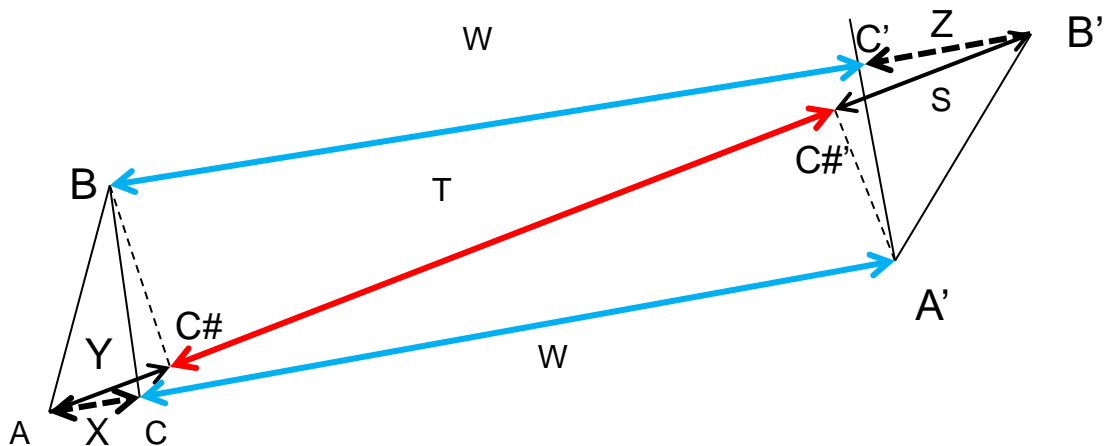


図 8 光線の構造 (A と A', B と B' が共役関係に無い場合)

光軸方向の諸元に比べ、光源、像面積、角度 $d\theta$ が十分に小さければ、メリジオナル面内では(14)式は成立せねばならない。物界の光路長 x, y 像界の光路長 z, s のそれぞれの差が常に等しいことが図 8 の光路長の関係が成立するために必要な条件と成る。このため、例えば物界においては変化が無く、像界だけにおいて光斑の幅 dr' が m 倍大きくなった場合、図 8 の像界の関係が全体的に m 倍拡大されただけでは(14)式が成立せず、 $d\theta$ が小さくなって、(14)式の関係が保たれることになる。それは図 8 で表わされる光線が、その他多くの近傍の平行光線と、立体角を持つ発散・収束光線の双方を代表するための条件であり、既述の通りフェルマーの原理により支配される光線の構造によるものと考えられる。図 9 に面同士が共役関係にある場合を示す。

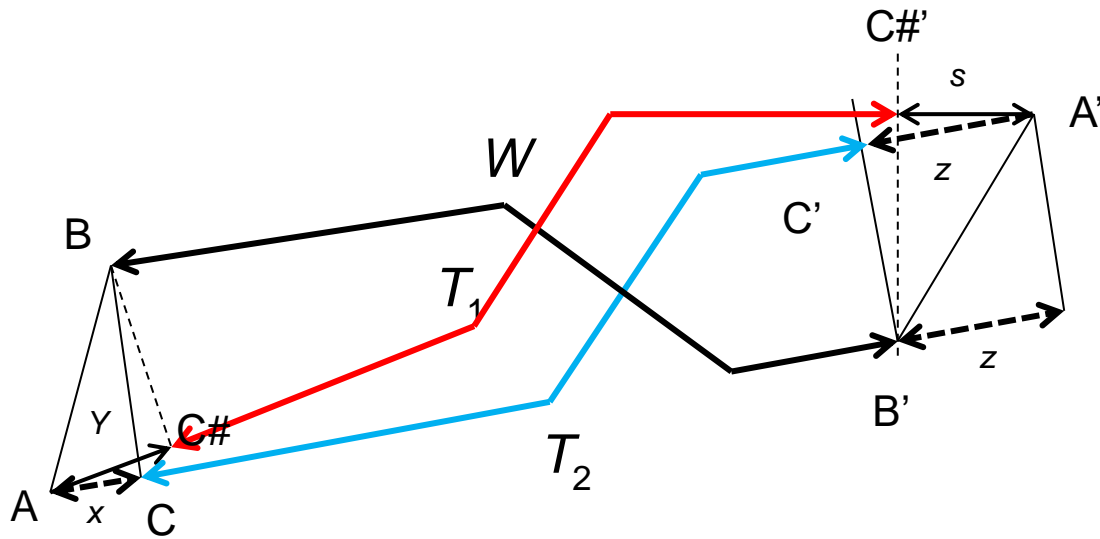


図9 光線の構造 (AとA', BとB'が共役関係にある場合)

さて、(10)式における α は微小量である必要は無いので光源から発するあらゆる方向に(10)式を考えることが出来るが、前回図2にある光線構造内での立体角は微小なので、広範囲にわたる角度範囲について照明的な量を考察する場合には積分が必要になる。

$$E = \int n^2 dS \cos \alpha d\Omega \quad (15)$$

この総放射空間とも考えられる量は、エタンデュ (étendue) ⁷⁻⁹⁾と呼ばれる。この量そのものは光束全体が光学系を通過してもやはり、保存される。従って、もし最終的に任意の受光面積、受光角を持つ素子に光束が収まるのであれば光源のエタンデュ、受光側 (或いはプロジェクター等の表示デバイス) のエタンデュを計算し集光効率を検討することが出来る^{14,7)p.27}。積分範囲における立体角が不変であれば(15)式の結果は

$$\begin{aligned} E &= \int_S \int_0^\theta 2\pi n^2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha dS \\ &= \pi n^2 S \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (16)$$

となる。従って、物界と像界についてはエタンデュが保存され、

$$n^2 S \sin^2 \theta = n'^2 S' \sin^2 \theta' \quad (17)$$

この(17)式は正弦条件そのものである⁹⁾。同じ光源部分から発し、いろいろな方向に進み光学系に入射した微小光束が、共役結像系の場合それぞれ、倍率関係で決まる同じ光斑面積に到達する、つまりコマ収差が発生していないことを表している。

3. アイコナール方程式

光線の方向を表す単位ベクトルを \mathbf{i} , \mathbf{i}' として、方向余弦を (L, M, N) , (L', M', N') とし、微小な変化 $d\mathbf{r} : (dx, dy, dz)$, $d\mathbf{r}' : (dx', dy', dz')$ とした場合、内積を用い、前回(4)式に於ける光路長の差を $dV = [BB'] - [AA']$ とすれば、

$$dV = -n(Ldx + Mdy + Ndz) + n'(L'dx' + M'dy' + N'dz') \quad (18)$$

と表せる。ここで(18)式を微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} = -nL, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -nM, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -nN \\ \frac{\partial V}{\partial x'} = n'L', \quad \frac{\partial V}{\partial y'} = n'M', \quad \frac{\partial V}{\partial z'} = n'N' \end{aligned} \quad (19)$$

これらの式の右辺は方向余弦に屈折率の係ったものであるから

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = n^2 \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2 = n'^2 \quad (21)$$

(20)式は別の表現では

$$|\text{grad } V|^2 = n^2 \quad (22)$$

である。この式はアイコナル方程式と呼ばれ、 V を **Hamilton** の特性関数或いは点アイコナルと呼ぶ¹¹⁾。 $\text{grad } V$ は V が一定な幾何光学的波面に直交するベクトルを表しており、光線の方向を示す。また、(22)式は **Maxwell** の方程式より直接導出することも出来る¹¹⁾。

4. 参考文献

- 1) 松居吉哉：レンズ設計法（共立出版，東京，1972）,p.23.
- 2) M.J.Kidger:Fundamental Optical Design(SPIE Press, Bellingham,2001),p.25.
- 3) V.N.Mahajan:Optical Imaging And Aberrationspart I
(SPIE Press,Bellingham,1998) .p.6.
- 4) A.Walther: The Ray and Wave Theory of Lenses
(Cambridge University Press,Cambridge,1995),p.21.
- 5) 鶴田匡夫：第4・光の鉛筆（新技術コミュニケーションズ，東京，1997）,p.410.
- 6) W.T.Welford:Aberration Of Optical Systems (AdamHilger,
Bristol,1986),p.87.
- 7) W.T.Welford, R.Winston:High Collection Nonimaging Optics
(Academic Press, San Diego1989)
- 8) W.H. Steel," Luminosity, Throughput, or Etendue?", Appl. Opt. **13**, 704 (1974).
- 9) R.W.Boyd:Radiometry and Detection of Optical Radiation
John Wiley & Sons,New York,1983),p.89
- 10) 工藤恵栄，上原富美哉：基礎光学（現代工学社，東京，1995）,p.53.
- 11) M.Born & E.Wolf：光学の原理 I，第7版／草川徹訳（東海大学出版
会,2005),p.169,p.199.
- 12) 龍岡静夫：光工学の基礎（昭晃堂，東京，1990）
- 13) 鶴田匡夫：第10・光の鉛筆（新技術コミュニケーションズ，東京，2014）
- 14) 佐藤浩：光学技術の辞典，110節（朝倉書店，東京，2014）,p427.
- 15) 牛山善太，草川徹：シミュレーション光学（東海大学出版会，東京，2003）

執筆者：牛山 善太

博士（工学）

元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師

（株）タイコ 代表取締役

（株）オプティカルソリューションズ 顧問

提供：

株式会社オプティカルソリューションズ

TEL: **03-5833-1332**

Mail: info@osc-japan.com

Web: <http://www.osc-japan.com>

〒101-0032

東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3階