光学設計ノーツ 75

アイコナール方程式の導出について

はじめに

前回は光線の構造を検討することから経てアイコナール方程式を導いた。今回はさらに話を進めさせて戴きたい。アイコナールとは実距離に屈折率を乗じた光路長の事であるが、フェルマーの原理に基づき、こうしたアイコナールの変化の仕方を定式化することは光学系の解析には非常に重要で、有用である。

１． 結像の余弦則からアイコナール方程式を導く

前回光学設計ノーツ第７４回において、光線の方向を表す単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$， $\boldsymbol{i}'$ として，方向余弦を（L,M,N)，(L',M',N'）とし，微小な変化 $d\vec{r}$ ：（dx, dy, dz），$d\vec{r}'$ ：（dx', dy', dz'）とした場合，内積を用い，本連載第７３回(4)式、

$$\left[BB'\right]-\left[AA'\right]=n'dr'\sin\alpha'-ndr\sin\alpha \qquad (73\text{-}4)$$

が導けた。補足説明させていただけば、物体と像の距離、角度α、α‘以外は微小量の前提があるので近軸理論内で扱ってよいのであるが、像界での２光線の為す角度については無視できるかどうかの検討はやや込みいる（図 1)。そこで偽経路 BPQB'を設定してこの光路長と、真光線 BB の光路長の差が２次以上の微小量になると言うフェルマーの原理を直接用いて

$$\left[BB'\right]-\left[AA'\right]=\left[BPQB'\right]-\left[APQA'\right]$$
$$=\left[BP\right]+\left[QB'\right]-\left[AP\right]-\left[QA'\right] \qquad (73\text{-}2)$$

とシンプルに表現できた。あとは近軸領域内での処理で(73-４)式が導けたわけである。

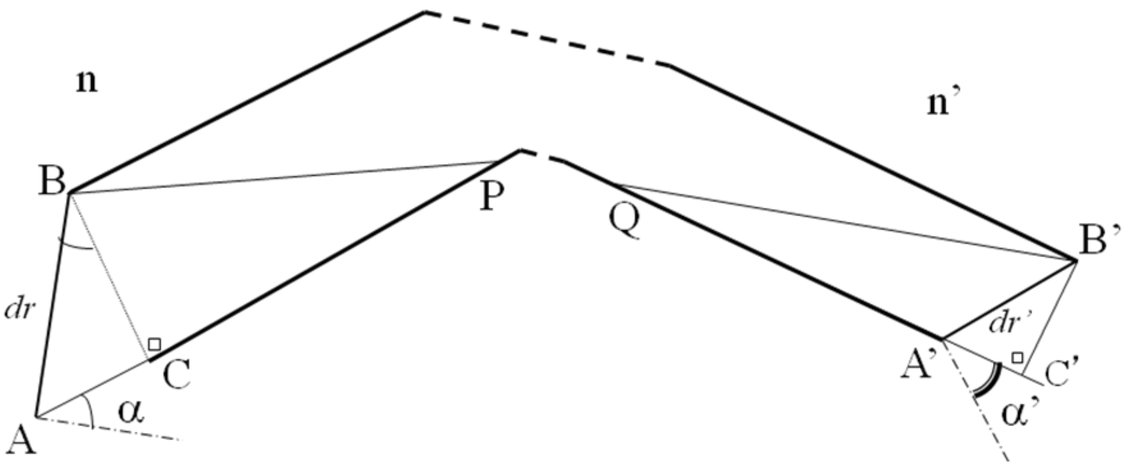

図１　アイコナール差を求めるための図

さて、（73-4）に於ける左辺の光路長（アイコナール）の差を dV = [BB'] －[AA']として，(73-4)式を 3 次元に拡張した。光線の方向を表す単位ベクトルを $\boldsymbol{S}$、線状の物体を立体的にベクトル $\boldsymbol{r}$ で表わせば、

$$\phi+\alpha=\phi'+\alpha'=\frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

なので、

$$dV=-n|\vec{r}||\vec{s}|\cos\phi+n'|\vec{r}'||\vec{s}'|\cos\phi' \qquad (2)$$

$$=-n(\vec{r}\cdot\vec{s})+n'(\vec{r}'\cdot\vec{s}')$$

従って成分で内積を表現すれば、

$$dV=-n(Ldx+Mdy+Ndz)+n'(L'dx'+M'dy'+N'dz') \qquad (74-18)$$

が得られる。そしてこの式を各成分毎に微分して、

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-nL \quad ,\frac{\partial V}{\partial y}=-nM \quad ,\frac{\partial V}{\partial z}=-nN$$

(74-19)

$$\frac{\partial V}{\partial x'}=n'L' \quad ,\frac{\partial V}{\partial y'}=n'M' \quad ,\frac{\partial V}{\partial z'}=n'N'$$

と出来きた。

さらに、それぞれを 2 乗して物界と像界ごとに加えれば、

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2=n^2 \qquad (74-20)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2=n'^2 \qquad (74\text{-}21)$$

として、アイコナール方程式と呼ばれるものが得られる。

ところで、改めてみるとアイコナール方程式の基となる(74-19)式は一体何を表しているのだろうか？Vというのは点 A が微小距離移動し点 B と成り、それに伴い像平面上の通過点も A'から B'に移動して、その場合の光路長（アイコナール）の変化を表している。物界で x 方向に点光源が微小変位した場合の光路長の変化量は、光線進行方向の方向余弦に屈折率を乗じたものに等しい。

この結果は本連載第 42 回の物界と像界の点が其々共役関係にある場合の光学的余弦則からも導くことが出来る（図 2、角度 ϕ と α は(1)式の関係にあるので、下記(42-1)式と（73-4）式はそもそも全く同じで式ではあるが)。第 42 回（１）式、

$$[PP']-[AA']=n'dr'\cos\phi'-ndr\cos\phi \qquad (42\text{-}1)$$

は直ちに(74-18)式に連なる。諸元は以下の図の通りである。

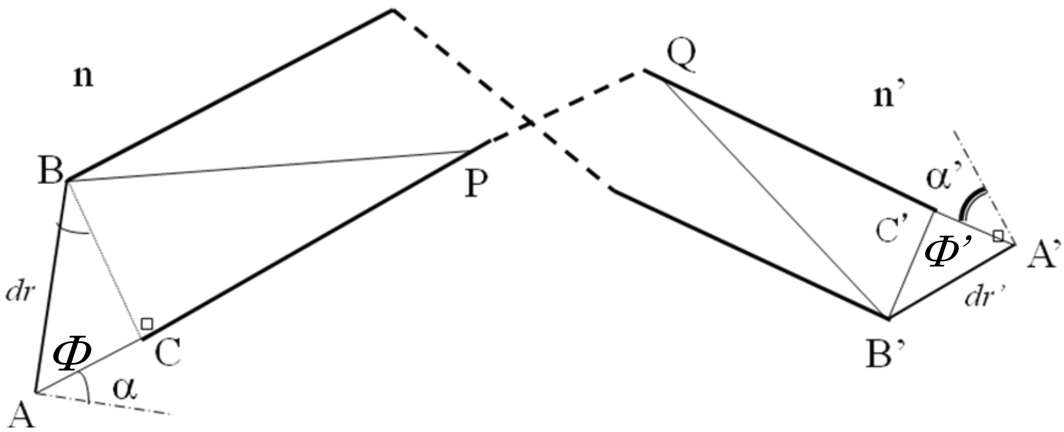

図 2　共役結像の場合に、光学的余弦則を考える。

ここまでの余弦則の考察は 2 次元面内であったが、3 次元的のも同様の考察が可能である。Z 軸方向については本連載 17,18 回でも触れている。従って、距離を表す線分 dr も立体的に（dx,dy,dz）と置けて、角度Φは x,y,z 軸からの角度（α、β、γ）に置き換えれば(図 3)光路長を表す（４２－1）式は成分ごとに

$$dV_x = n'dx'\cos\alpha' - ndx\cos\alpha$$

$$dV_y = n'dy'\cos\beta' - ndy\cos\beta \qquad (3)$$

$$dV_z = n'dz'\cos\gamma' - ndz\cos\gamma$$

と書ける。

ここで、物界の B の位置のみ変化した場合を考えよう。本来は同じ角度で B が変化すれば一般的には B'の位置も変わってしまうのだが、B からの光線角度を微妙に調整すれば B'を不動とすることは可能である。この微調整角度は極微小な角度と成るので無視できる。すると、上記（3）式から、

$$\frac{dV}{dx} = -n\cos\alpha \quad ,\frac{dV}{dy} = -n\cos\beta \quad ,\frac{dV}{dz} = -n\cos\gamma$$

$$(4)$$

$$\frac{dV}{dx'} = n'\cos\alpha' \quad ,\frac{dV}{dy'} = n'\cos\beta' \quad ,\frac{dV}{dz'} = n'\cos\gamma'$$

が得られる。偏微分の表記と方向余弦を用いれば(74-19)式とまったく同じになる。つまり、当然のことではあるが（74-19）式は、(73-4)式、或いは（42-1）式で表される内容を原因の要素に分解して表示したものに過ぎない。なにより(73-4)式、(42-1）式は幾何光学において重要であって、(74-19)式はそれを基に光学系の働きの理解を進めるための表現である。

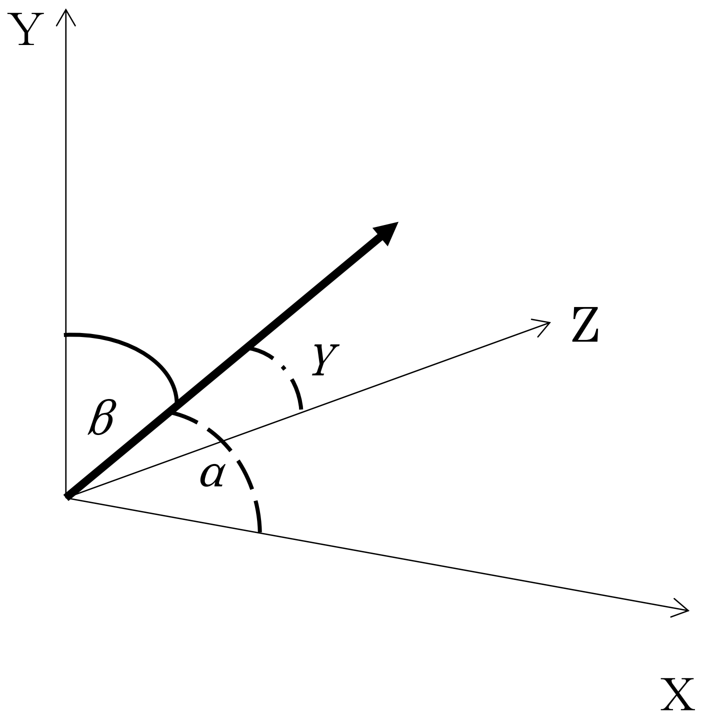

図３　　立体的な角度の表示

２．　参考文献

1)　松居吉哉：収差論（JOEM，東京，1995）．
2)　A.Walther: The Ray and Wave Theory of Lenses (Cambridge Univercity Press,Cambridge,1995)
3)　W.T.Welford:Aberration Of Optical Systems (AdamHilger, Bristol,1986)
4)　M.Born & E.Wolf：光学の原理Ｉ，第７版／草川徹訳（東海大学出版会,2005)
5)　牛山善太，草川徹：シミュレーション光学（東海大学出版会，東京，2003）

執筆者：牛山 善太
博士（工学）
元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師
(株)タイコ 代表取締役
(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供：
株式会社オプティカルソリューションズ
TEL: **03-5833-1332**
Mail: info@osc-japan.com
Web: http://www.osc-japan.com
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階