光学設計ノーツ 76

平面波合成で考える完全結像

本連載 54 回で、複素電場が様々な方向に伝播する平面波の合成によって表せるという、平面波スペクトル法（合成法）について解説させていただきたいた。今回は再びこの平面波合成法をとりあげ、この手法を用いて完全な結像成立のための条件について考えさせて戴く。完全結像のための興味深い条件がそこから得られる。

1.　平面波合成による光波の記述

平面波の一般形（A は最大振幅）、

$$u = A \cdot \exp\left(i\vec{k} \cdot \vec{r}\right) \quad -\ (1)$$

を考え、α β γ を、平面波進行方向を表す方向余弦とすれば、

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha, \beta, \gamma)$$

であり、 (1)式は

$$u(x, y, z) = A \cdot \exp\left\{\frac{2\pi i}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\right\} \quad (2)$$

と置ける。ここで、様々な方向に進行する平面波の重ねあわせによる、新たな波動を表す複素関数を改めて $u(\quad)$ とすれば、総ての平面波の方向は α 、 β で定まるので

$$u(x,y,z)=\int A(\alpha,\beta,\gamma)\exp\left\{\frac{2\pi i}{\lambda}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\right\}d\alpha d\beta d\gamma \quad -（3）$$

と表現することが可能である。波数 k、

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

を用いれば

$$u(x,y,z)=\int A(\alpha,\beta,\gamma)\exp\{ik(\alpha x+\beta y+\gamma z)\}d\alpha d\beta d\gamma \quad - (4)$$

となる。光軸上の物体面上に(x,y,z)座標系を考えて、ここでの x,y 平面上での平面波の合成を計算すれば（4）式は、

$$u(x,y,0)=\int A(\alpha,\beta)\exp\{ik(\alpha x+\beta y)\}d\alpha d\beta \qquad (5)$$

同様に像面上に（x’,y’,z’）座標系を考えこの面上での平面波の合成は、

$$u'(x',y',0)=\int A'(\alpha',\beta')\exp\{ik(\alpha' x'+\beta' y')\}d\alpha' d\beta' \qquad (6)$$

と表せる。

2． 完全な結像のための条件

さて、ここで、完全な結像を、被写体平面上の模様、構造の、像平面上における完全に相似像としての再現と考えると、大きさ、明るさには任意性があるとして系数 P,Q を用い、

$$u'(x',y',0)=Pu(Qx',Qy',0) \qquad (7)$$

と置ける。この（7）式を（5）式に代入すると

$$u(x',y',0)=P\int A(\alpha,\beta)\exp\{ik(Q\alpha x'+Q\beta y')\}d\alpha d\beta \qquad (8)$$

が成立する。ここで、(6)、(8)式を比較する。(8)式の積分変数を α/Q、β/Q と置き換えると

$$u(x',y',0)=P\int A\left(\frac{\alpha}{Q},\frac{\beta}{Q}\right)\exp\{ik(\alpha x'+\beta y')\}\frac{1}{Q^2}d\alpha d\beta \qquad (9)$$

したがって、

$$A'(\alpha',\beta')=\frac{P}{Q^2}A\left(\frac{\alpha'}{Q},\frac{\beta'}{Q}\right) \qquad (10)$$

が成立すれば、積分変数を α'、β' → α、β と置き換えれば（９）式は（６）式と同じになる。この(10)式が完全結像の条件と成る。ここには位相の変化が無いので、平面波は射出後も平面波であって、進行方向に一様な定数がかかったものとなる。結局、入射波の方向余弦を用いて表せば

$$\alpha'=Q\alpha$$

$$(11)$$

$$\beta'\alpha=Q\beta$$

という関係が得られる。さらに方向余弦は z 軸からの角度 θ とその周りの回転角 ϕ を用いて以下の様に表現出来る。

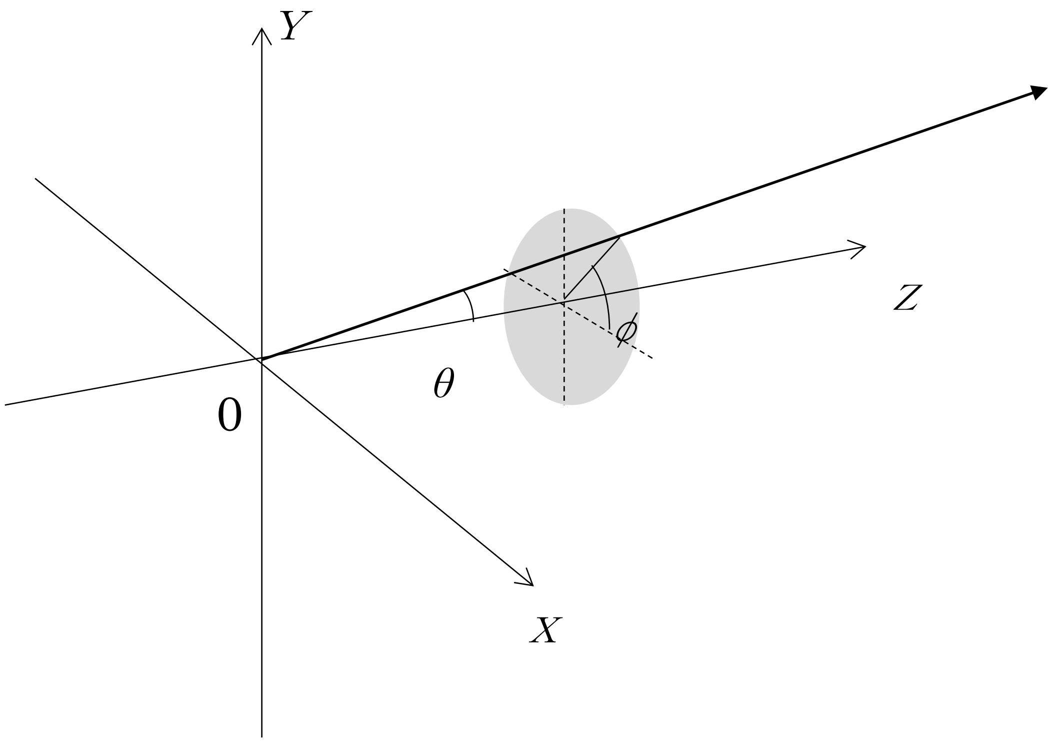

図 1　　平面波の進行方向の表示

物界については、

$$\alpha = \sin\theta\cos\phi$$
$$\beta = \sin\theta\sin\phi \tag{12}$$

となる。像界については、平面波の進行角度そのものを表すベクトルは、光学系が光軸について回転対称であれば光軸を含むメリディオナル内に一旦存在すれば、その後も常に存在すると考えられるので

$$\alpha' = \sin\theta' \cos\phi$$

(13)

$$\beta' = \sin\theta' \sin\phi$$

と表される。従って、（11）式から、

$$\sin\theta' = Q\sin\theta \qquad (14)$$

という関係が得られる。平面波が入射し(14)式であらわされる方向に平面波として射出するという構造が完全結像のためには求められる。

3. 参考文献

1）A.Walther:The Ray and Wave Theory of Lenses
(Cambridge University Press,Cambridge,1995)

2）M.Born & E.Wolf :Principles of Optics,7th edition(Pergamon Press,
Oxford,1993)／草川徹訳：光学の原理(東海大学出版会,2005)

3）ヤリーブ：光エレクトロニクス基礎編（多田邦夫、神谷武志監訳）
（丸善、東京、2002）

4）J.W.Goodman:Introduction to Fourier Optics 2^{nd}.edi.
(McGraw-Hill,NewYork,1996)

5） 谷田貝豊彦：光とフーリエ変換(朝倉書店,東京，1992)

6） 牛山善太：波動光学エンジニアリングの基礎（オプトロニクス社、東京、2005）

執筆者：牛山 善太
博士（工学）
元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師
(株)タイコ 代表取締役
(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供：
株式会社オプティカルソリューションズ
TEL: **03-5833-1332**
Mail: info@osc-japan.com
Web: http://www.osc-japan.com
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階