光学設計ノーツ 78

平面波の表現について

前回において平面波合成により完全結像のための条件が導けたが、今回はその最も基礎になるところで、３次元空間における平面波そのものについて改めて考えさせて戴きたい。

1　1次元的平面波

最もシンプルで基本的な波動のひとつが、正弦波である。この正弦波が、z方向に速度vで進行する場合は、

$$u(z,t)=A\cos[k(z-vt)+\phi] \qquad -(1)$$

と表わされる。波動の揺れ、変位の最大値Aを振幅、中括弧内を位相と呼ぶ。また、明らかに正弦波は周期を持っている。そこで空間的な1周期を波長λ、時間的な周期を周期Tで表わす。

$$T=\frac{\lambda}{v} \qquad -(2)$$

kは波数と呼ばれ、波動が単位距離進行する時に変化する位相角度であり、

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \qquad -(3)$$

と表わされる。ϕは初期位相の項であり、空間座標zと時間座標tの原点を適当に選べば0にすることができる。また、周波数fを用いれば、

$$f=\frac{1}{T}=\frac{v}{\lambda} \qquad -(4)$$

単位時間に変化する位相角度を角周波数ωで表わし、

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad -(5)$$

また、

$$\omega = 2\pi f \qquad -(6)$$

真空中の光速をcとすれば、ここまでのvは任意の媒質中の速度であるとすれば、cとvの比がその媒質の屈折率となり、

$$n = \frac{c}{v} \qquad -(7)$$

周波数fは不変であるので、

$$f = \frac{c}{n\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}$$

よって、

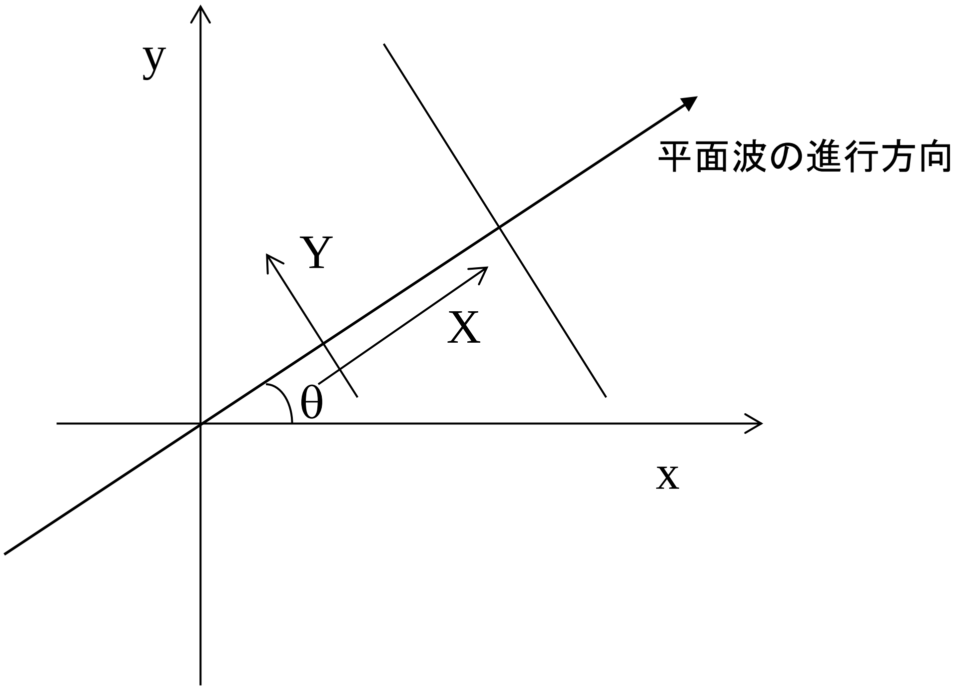
$$n\lambda = \lambda_0 \qquad -(8)$$

となる。

波動の位相が等しい点を連ねた面を等位相面、或いは波面と呼ぶ。(1)式により表わされる波動はz方向へ進行する1次元的波動であるが、z 軸に垂直な平面を等位相面として持つ波は総べて(1)式にて表わされる。この様に、波面が平面の波動を平面波と呼ぶ。波動は一般的に波面に垂直な方向に進行する。

2　3次元空間における平面波

ここで、2次元、或いは3次元空間を伝播する平面波の記述について考えよう。**図―1**に示した様に、x軸とθの角度を為す方向に進行する正弦平面波を考えよう。



図ー1　2次元的平面波

新たに**波動の進行方向に X 軸、波面上に Y 軸を持つ新座標系を考えると、**初期位相項を0とおいて、

$$kv = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{T} = \omega$$

なので、(1)式より、

$$u(X, Y, t) = A\cos(kX - \omega t) \qquad -(9)$$

この式をx―y旧座標に変換すると、

$$u(x, y, t) = A\cos[k(x\cos\theta) - \omega t] \qquad -(10)$$

ここで、波数kを考えると、これは新 X 軸上で単位距離、波動が進行する時に変動する位相角を表わすので、方向(波動進行方向、この場合 X 軸方向)と量を持ったベクトルと考えることができる。これを波数ベクトルと呼ぶ。

改めて波数ベクトルの絶対値をkと考えて、旧x－y座標上における成分表示をすれば、

$$k=(k_x,k_y)=(k\cos\theta,k\sin\theta) \qquad -(11)$$

よって、(10)式は、

$$u(\chi,y,t)=A\cos(k_x\chi+k_y y-\omega t) \qquad -(12)$$

この(12)式を3次元空間における波動の表現に拡張することは容易で、図―2における場合、

$$u(\chi,y,z,t)=A\cos(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t) \qquad -(13)$$

この場合、

$$\vec{k}=(k_x,k_y,k_z)=(k\cos\alpha,k\cos\beta,k\cos\gamma) \qquad -(14)$$

である。また、任意の座標(x、y、z)の位置ベクトル $\vec{r}$ を考えると、波動の進行方向を表わす波数ベクトルとの内積は、成分計算をして、

$$\vec{k}\cdot\vec{r}=k_x x+k_y y+k_z z$$

よって、(13)式は

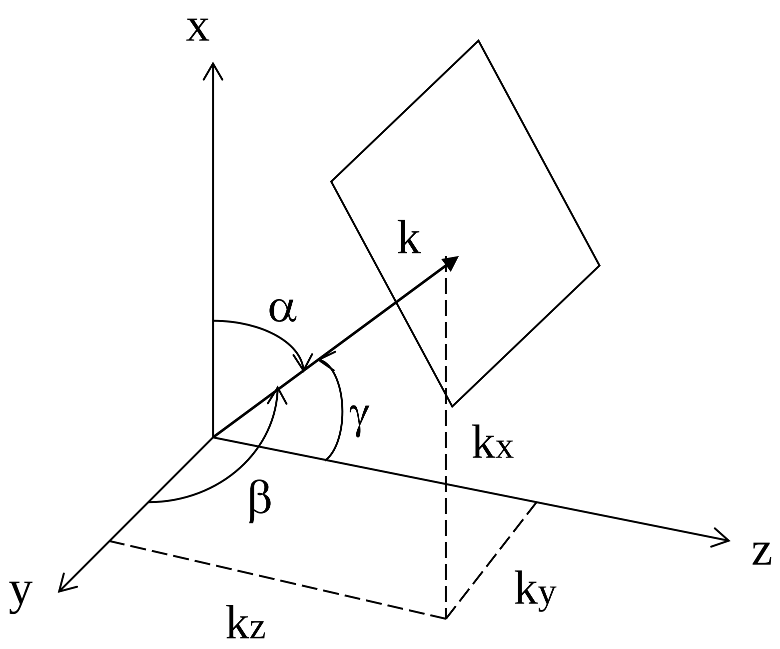
$$u(\vec{r},t)=A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \qquad -(15)$$

と表現することができる。

さらに、(14)式の方向余弦を用いると、(8)式より、

$$\vec{k}\cdot\vec{r}=\frac{2\pi}{\lambda_0}n(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma) \qquad -(16)$$

とすることも可能である。



図－２　３次元的平面波

参考文献

1） M.Born & E.Wolf :Principles of Optics,7th edition(Pergamon Press, Oxford,1993)／草川徹訳：光学の原理（東海大学出版会,2005）
2） 辻内順平：光学概論Ｉ（朝倉書店、東京、1979）
3） 谷田貝豊彦：光とフーリエ変換(朝倉書店、東京、1992）

執筆者：牛山 善太
博士（工学）
元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師
(株)タイコ 代表取締役
(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供：
株式会社オプティカルソリューションズ
TEL: **03-5833-1332**
Mail: info@osc-japan.com
Web: http://www.osc-japan.com
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階