

## 光学設計ノーツ 79

### あらためて干渉について

本連載、ごく初めの方では何回か閉じた系、或いは薄膜、平面平行硝子板内における干渉等について数回か説明させていただいた。ところが、実は干渉の最も基本的なところについてはまだ触れさせていただけていない。干渉は波動的に光学現象を捉えるときには最も重要な概念のひとつであり、幾何光学と波動光学も結びつける。今回は初心に戻って干渉の基本的な考え方について取り上げさせて頂く。

#### 1 干渉の基本的原理

$E_1$ ,  $E_2$ の二つの電場の振幅を考えると、これらは当然、以下の(0)式、ベクトル波動方程式を満たす。(媒質中の速度  $v$  を導入して、真空中は当然光速  $c$  となる。)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (0)$$

そして、明らかに  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  も、或いはそれ以上多くの電場の加算も(0)式に代入して考えてみると波動方程式を満たしている。(これを線形的な重ね合わせの原理と呼ぶ。) 故に、光波の合成(二つの光波の演算)は単純な加算で表現できることが分かる。それぞれの光波には、お互いの影響は何も生じない。ただ単純に加えられ、重なり合っている場の波動として計算されるだけである。

ここで、二つの正弦波動の平面波を考えて、

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \exp\{-i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1)\} \quad (1)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \exp\{-i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2)\}$$

これらの光波が合成された、屈折率  $n$  の界における強度と振幅の間には

$$I = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu}} \frac{|\vec{E}_0|^2}{2} = n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}} \frac{|\vec{E}_0|^2}{2}$$

なる重要な関係があり、 $K$ を定数として

$$I = K |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 \quad (2)$$

と書ける。従って、

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 + \vec{E}_2 &= \vec{E}_{01} \cos(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1) + \vec{E}_{02} \cos(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2) \\ &\quad - i \{ \vec{E}_{01} \sin(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1) + \vec{E}_{02} \sin(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2) \} \quad (3) \end{aligned}$$

なので、 $K$ を省略して表記すると

$$\begin{aligned} I(t) &= |\vec{E}_{01}|^2 + |\vec{E}_{02}|^2 \\ &\quad + 2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \{ \cos(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1) \cos(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2) + \sin(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1) \sin(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2) \} \end{aligned}$$

ここで三角関数の加法定理を用いて、

$$\begin{aligned} I(t) &= |\vec{E}_{01}|^2 + |\vec{E}_{02}|^2 \\ &= |\vec{E}_{01}|^2 + |\vec{E}_{02}|^2 + 2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos\{(\omega_1 - \omega_2)t - (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + (\varphi_1 - \varphi_2)\} \quad (4) \end{aligned}$$

となる。上式右辺第1, 2項の和は明らかにそれぞれの光波が単独に存在した場合の単純な強度和であり、後述の通り第三項が位相項に依存して強度を揺らめかせる干渉を表す。本来は光の強さを測定する時には、光の強度をある時間内で平均した値が観測値とされる。

$$I = \langle I(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} I(t) dt \quad (5)$$

この場合、簡便のため 2 光波の波数、進行方向を等しいと置き、最大振幅をスカラー量として  $A_1, A_2$  とすれば、以下の様に表現出来る。

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \langle \cos\{(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)\} \rangle \quad (6)$$

< >なる記号は時間  $T_0$  内における平均を表わす。ここで、 $\cos$  内第一項について考えてみると、

$$(\omega_2 - \omega_1)t = 2\pi(\nu_2 - \nu_1)t \quad (7)$$

となり、振動数差に比例し、時間と共に変化する唸り現象を生じせしめる項である。この時、唸り周期が観測積分時間より十分に小さければ、つまり以下の関係が成り立つ時

$$\frac{1}{(\nu_2 - \nu_1)} \leq T_0 \quad (8)$$

観測時間内に(6)式における  $\cos$  振動は打ち消し合い(4)式は、比例定数を省略して

$$I = A_1^2 + A_2^2 = I_0 \quad (9)$$

として観測され、干渉は見かけ上、起こらない。ところが、(8)式左辺で表わされる周期が  $T_0$  より大きくなると、観測のたびに  $I$  が周期的に変化する唸りが観察できるはずである。  
(実際には難しいが)

ここでもし、 $\omega_1 = \omega_2$  とすれば(6)式は

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle \quad (10)$$

となり、 $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  の時間平均値が一定値になれば、測定点 M における強度  $I$  は(10)式により確定し、光波は、この点においてコンスタントな明るさを示すことになる。この現象を[狭義の]光の干渉と呼ぶ(光波の合成による新しい光波の生成を広義の干渉と呼ぶとすれば、)。

この時、明らかに、

$$\left(2N - \frac{1}{2}\right)\pi < \varphi_2 - \varphi_1 < \left(2N + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (11)$$

のとき強め合う干渉

$$\left(2N - \frac{3}{2}\right)\pi < \varphi_2 - \varphi_1 < \left(2N - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (12)$$

のとき弱め合う干渉を示す。

また、(4)式に戻って考えれば第3項における位相差が丁度、偶数 $\times\pi$ であれば、 $\cos$ は1となり強度は

$$I = \left|\vec{E}_{01}\right|^2 + \left|\vec{E}_{02}\right|^2 + 2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \quad (13)$$

と最高に強め合い、2光波の単独強度の和の倍になる。位相差が奇数 $\times\pi$ であれば

$$I = \left|\vec{E}_{01}\right|^2 + \left|\vec{E}_{02}\right|^2 - 2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \quad (14)$$

となり、弱め合う。仮に $\vec{E}_{01}=\vec{E}_{02}$ であれば(13)式では単独強度和の倍になり、(14)式では強度は0になる。

また、 $\vec{E}_{01}$ と $\vec{E}_{02}$ の内積が乗ぜられているので、3次元空間におけるそれらの振動方向の違いを考慮せねばならない。仮に、2光波が互いに直交する振動面を持つ直線偏光であれば、内積は0になり、干渉は起きない。

因みに3波光 $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ の合成であれば(4)式は以下の様になる。

$$\begin{aligned}
I(t) &= \left| \vec{E}_{01} \right|^2 + \left| \vec{E}_{02} \right|^2 + \left| \vec{E}_{03} \right|^2 \\
&+ 2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \left\{ \cos(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1) \cos(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2) + \sin(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1) \sin(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2) \right\} \\
&+ 2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{03} \left\{ \cos(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1) \cos(\omega_3 t - \vec{k}_3 \cdot \vec{r} + \varphi_3) + \sin(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1) \sin(\omega_3 t - \vec{k}_3 \cdot \vec{r} + \varphi_3) \right\} \\
&+ 2\vec{E}_{02} \cdot \vec{E}_{03} \left\{ \cos(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2) \cos(\omega_3 t - \vec{k}_3 \cdot \vec{r} + \varphi_3) + \sin(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2) \sin(\omega_3 t - \vec{k}_3 \cdot \vec{r} + \varphi_3) \right\} \\
&= \left| \vec{E}_{01} \right|^2 + \left| \vec{E}_{02} \right|^2 + \left| \vec{E}_{03} \right|^2 + 2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos\left\{ (\omega_1 - \omega_2)t - (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + (\varphi_1 - \varphi_2) \right\} \\
&\quad + 2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{03} \cos\left\{ (\omega_1 - \omega_3)t - (\vec{k}_1 - \vec{k}_3) \cdot \vec{r} + (\varphi_1 - \varphi_3) \right\} \\
&\quad + 2\vec{E}_{02} \cdot \vec{E}_{03} \cos\left\{ (\omega_2 - \omega_3)t - (\vec{k}_2 - \vec{k}_3) \cdot \vec{r} + (\varphi_2 - \varphi_3) \right\} \tag{15}
\end{aligned}$$

ここから、より多くの光波による干渉の場合も想像がつく。

いろいろな光波が集まっても 2 光波の場合と同じ様にそれぞれの単独強度の項にそれ以降の干渉を表す項が変化をもたらして干渉が起きる構造が分かる。

## 1.2 参考文献

- 1) M.Born & E.Wolf：光学の原理 I、第 7 版／草川徹訳（東海大学出版会, 2005）
- 2) 石黒浩三：光学（共立出版、東京、1953）
- 3) 榎田孝司：光物理学（共立出版、東京、1985）
- 4) 久保田広：応用光学/POD 版（岩波書店、東京、1980）
- 5) 辻内順平：光学概論 II（朝倉書店、東京、1979）
- 6) 村田和美：光学（サイエンス社、東京、1979）
- 7) 牛山善太：波動光学エンジニアリングの基礎（オプトロニクス社、東京、2005）

執筆者：牛山 善太

博士（工学）

元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師

（株）タイコ 代表取締役

（株）オプティカルソリューションズ 顧問

提供：

**株式会社オプティカルソリューションズ**

TEL: **03-5833-1332**

Mail: [info@osc-japan.com](mailto:info@osc-japan.com)

Web: <http://www.osc-japan.com>

〒101-0032

東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階