光学設計ノーツ 81_2

ホイヘンスーフレネルの回折積分について　1

これまでにキルヒホッフによる、回折積分計算等には触れさせていただいた。
今回は、より回折理論を直感的に表すホイヘンスーフレネルの回折の考え方について、改めて整理させていただきたい。ここでは主に参考文献１）を参考にさせていただいている。

１．　光波の合算

点 Q から発した光波が絞りに達し、さらに像面（スクリーン）に達しているとする（図 1)。この時の像面上の点 M における、光の強さを求めようとすることが、結局、今回の課題である。Q を出た球面波は絞り S のところに達し、この時の波面を W としよう。絞りの中心 O と Q を結ぶ線を Z 軸とし（一般的には光軸）像面は光軸に垂直で、光軸との交点を Q’としよう。Q と O の距離を a、O と Q’の距離を b とする。

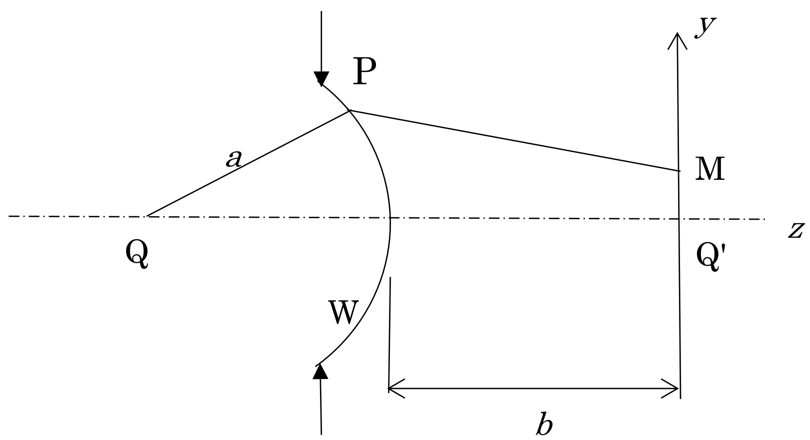

図 1

ホイヘンスーフレネルの理論の言わんとすることは、ここでの波面 W を無限に細い領域に分けて（波面を同心円状の非常に細い面積に分割していっても良い)、それぞれの領域から M に及ぼす波動的影響を計算し、その代数和を得れば M における振幅が得られると言うことである。

さて仮に点光源 Q からの半径 1 の波面上の波動を

$$A = A_0 \sin\omega t$$

と表せば、波面 W 上では距離に反比例して振幅は減り（強度は距離の 2 乗に反比例する)、位相（角度・ラジアン）は 2 π a/λ、遅れたものになる。従って

$$A = (A_0/a)\sin(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}a) \qquad (1)$$

となる。さて、ここから波面 W 上の P 点付近の微小面積 dw について考える。P から M の距離を r とする。すると dw の齎らす M における振幅 A は

$$A = (k/r)(A_0/a)\sin\{\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(a+r)\} \qquad (2)$$

と表せる。k はここでは詳しくは触れないが波面の法線と測定方向との角度に依存した補正量であり、ここではとりあえず 1 とおくことにする。

すると、ホイヘンス－フレネルの考え方により、この波面からの M への影響は開口内の微小面積の全影響を合算して以下のように表されえる。

$$A = \int_W (1/r)(A_0/a)\sin\{\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(a+r)\}\,dw \qquad (3)$$

2. 振幅の計算

ここで、やや荒っぽい近似ではあるが、光軸方向のスケールに比べて、絞り等の y 軸方向の構造が十分小さいとすれば、三角関数外の r を近似的に b と置き積分の外へ出す。これは結像光学系におけるような収束波面を考える場合には適切な考え方である。また、振幅の比のみを考えることとし $A_0/(ab)=1$ と置こう。すると（3）式は簡単になり、

$$A = \int_W \sin\{\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(a+r)\}\,dw \qquad (4)$$

と、表せる。

また、簡潔のため全てを 2 次元面内（紙面内）で考え、Q’ を原点として、OQ’ に垂直に、y 軸をとる。そして 2 点 P、M の座標を以下のように決める。

P（y、z）＝P（ξ、-b+ζ）　　、　　M（y、０）

よって

$$r = \sqrt{(\xi - y)^2 + (b - \zeta)^2} \qquad (5)$$

さらに

$$r = \sqrt{\xi^2 - 2y\xi + y^2 + b^2 - 2\zeta b + b^2} \qquad (6)$$

また、２次元的には Q を中心とする円である波面 W の式は

$$\xi^2 + (a + \zeta)^2 = a^2 \qquad （７）$$

と置けるのでξ²＝　の形にして（６）式に代入して整理すれば

$$r = \sqrt{-2y\xi + y^2 + b^2 - 2(a + b)\zeta} \qquad (8)$$

と出来る。また、（７）式より

$$\xi^2 + 2a\zeta + \zeta^2 = 0$$

ζは a,b の絶対値と比べて非常に微小な値とみなせるので、その 2 次の項を無視して考えれば

$$\zeta = -\frac{\xi^2}{2a} \qquad （９）$$

と出来る。この式を（８）式に代入すれば

$$r = \sqrt{b^2 + y^2 - 2y\xi + (a + b)\xi^2/a} \qquad (10)$$

さらに

$$r = b\sqrt{1 + y^2/b^2 - 2y\xi/b^2 + (a + b)\xi^2/(ab^2)}$$

である。ここで 1 次近似の関係

$$(1 \pm \alpha)^m \approx 1 \pm m\alpha$$

を用いて上式は

$$r \approx b + \frac{y^2}{2b} + \left\{-\frac{y\xi}{b} + \frac{(a+b)\xi^2}{2ab}\right\} = \varepsilon' + \{\varepsilon\} \qquad (11)$$

と置ける。ここでεはξの関数、ε'はξを含まない積分に関係のない項である。すると（11）式から（4）式は以下のようになる。

$$A = \int_W \sin\{\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(a + \varepsilon' + \varepsilon)\}\, dw \qquad (12)$$

$$= \int_W \sin\{\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(a + \varepsilon') - (\frac{2\pi}{\lambda}\varepsilon)\}\, dw$$

三角関数の加法定理を用いて

$$= \int_W [\sin\{\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(a + \varepsilon')\}\cos(\frac{2\pi}{\lambda}\varepsilon) - \cos\{\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(a + \varepsilon')\}\sin(\frac{2\pi}{\lambda}\varepsilon)]\, dw$$

（7）、（9）式から、2次元断面内での、波面上の積分はξを変化させることにより行えることより、

$$= \sin\{\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(a + \varepsilon')\}\int_W \cos(\frac{2\pi}{\lambda}\varepsilon)d\xi - \cos\{\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(a + \varepsilon')\}\int_W \sin(\frac{2\pi}{\lambda}\varepsilon)\, d\xi \qquad (13)$$

と点Mにおける振幅 A が得られる。

3.　参考文献

１）久保田広：”応用光学”、(1989、岩波書店、東京)、p.106

２）牛山善太：波動光学エンジニアリングの基礎（オプトロニクス、東京、2005）

執筆者：牛山 善太

博士（工学）

元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師

(株)タイコ 代表取締役

(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供：

株式会社オプティカルソリューションズ

TEL: **03-5833-1332**

Mail: info@osc-japan.com

Web: http://www.osc-japan.com

〒101-0032

東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階