

光学設計ノーツ 82 ver. 1.0

多数の波動による干渉、波動の合成の考え方 2

本連載前々回 80 回において波動の合成について触れさせていただいたが、そこで多数の正弦波を合成することについて扱った。そのあたりで少し説明不足のところもあった様に思えるので、今回、少し話は戻るのであるが補足させていただきたい。

1. 多くの正弦波の合成

元々、合成された振幅 u は正弦波の合成として以下の様に(80回 (10) 式)表現できた。

$$u = \sum_m A_m \cos \varepsilon_m \cdot \sin(\omega t + \varepsilon_0) + \sum_m A_m \sin \varepsilon_m \cdot \cos(\omega t + \varepsilon_0) \quad (80-10)$$

ここで

$$C = \sum_m A_m \cos \varepsilon_m = A \cos \varepsilon \quad (1)$$

$$S = \sum_m A_m \sin \varepsilon_m = A \sin \varepsilon \quad (2)$$

と新たな時間変化に対して一定な、波動を便宜的に考えた。同一の周波数の正弦波を幾つも考えた場合には、それらが合算された場合に、その結果も正弦波になるということである。光波の干渉を考える場合には主に周波数は一定とする。であるからこのところは根本的なところなので、一応、説明を捕捉させて頂く。

(1) (2) 式における多数の光波の位相成分 ε_m を、特定の場所における三角関数の位相角度を θ 、つまり x を位置として、

$$\theta = \frac{2\pi}{\lambda} x$$

それぞれの光波で値が変化し得る初期位相を ϕ として、

$$A_m \cos \varepsilon_m = A_m \cos(\theta + \phi_m) \quad (3)$$

と置く。

ここで、先ず 2 光波の合成を考えて、波長は同一として以下の式を考えることにする。

$$u = A \cos \theta + B \cos(\theta - \varphi) \quad (4)$$

$$= A \cos \theta + B \cos \theta \cos \varphi + B \sin \theta \sin \varphi$$

$$= (A + B \cos \varphi) \cos \theta + B \sin \theta \sin \varphi$$

更に

$$a = (A + B \cos \varphi) \quad , \quad b = B \sin \varphi \quad (5)$$

と置けば、

$$u = a \cos \theta + b \sin \theta \quad (6)$$

と表せる。

さてここで図 1 にある様に、直角を挟んで a 、 b の辺、角度 α 、 β を持つ直角三角形を考える。すると

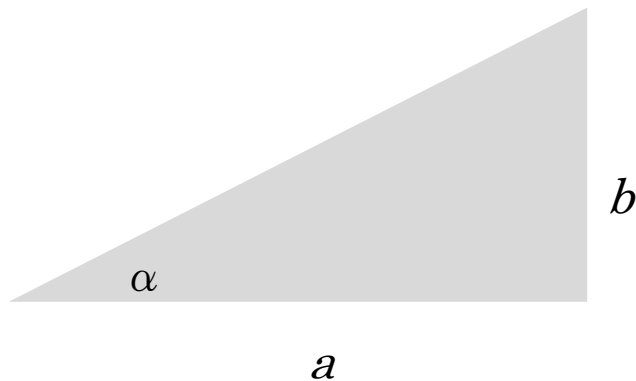


図 1 a 、 b と角度 α の関係

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (7)$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (8)$$

であり、これらの式をそれぞれ b 、 a について解き、(6) 式に代入すれば

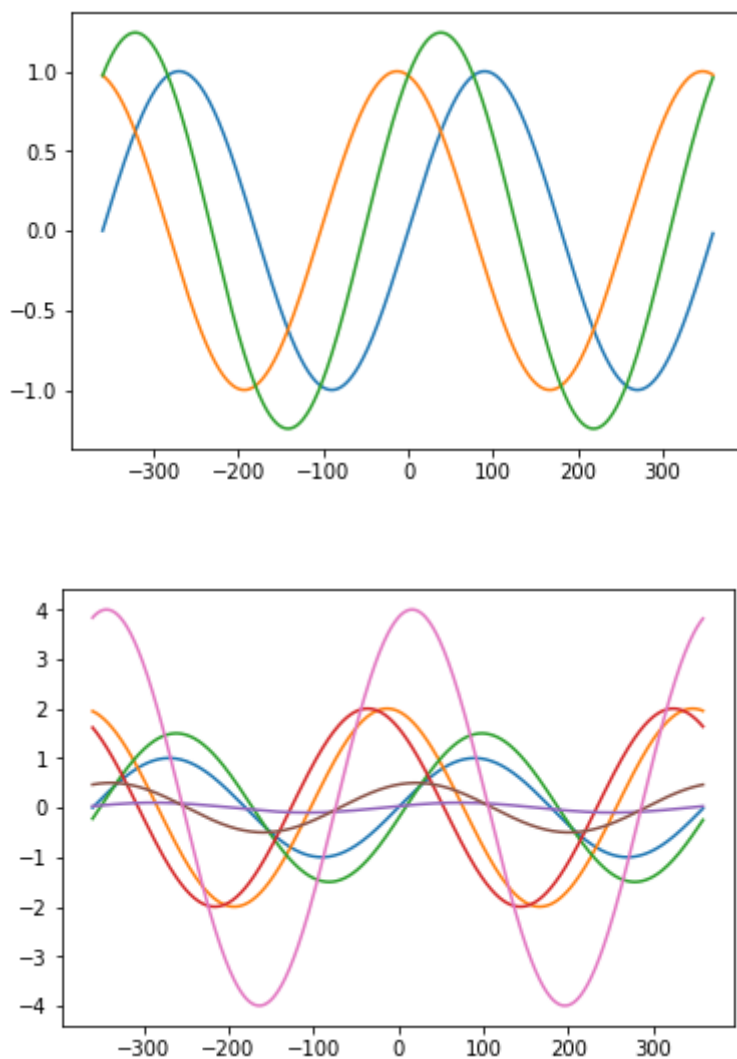
$$\begin{aligned} u &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos\alpha \cos\theta + \sin\alpha \sin\theta) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \alpha) \end{aligned} \quad (9)$$

と出来 (三角関数の合成公式 4)、2 正弦波の合成は、波長の関数 θ と初期位相 α で表現される、正弦波になることが分かる。ここで図 1 にある通り、

$$\alpha = \tan^{-1}(b/a) \quad (10)$$

である。

2 光波の合成を、積み重ねていけば多くの正弦波の合成も同様に考えられるので、その場合も合成された結果は正弦波となる。図 2 に幾つかのランダムな初期位相を持つ、同じ周波数の正弦波の合成を計算した例を示す。



**図2 正弦波の合成結果 (上) 2 正弦波の合成 (下) 6 正弦波の合成
それぞれ最大の振幅の正弦波が合成されたもの。横軸は位相角度 (度)**

また、更に多数の、振幅 (0 から 1 の間に) と初期位相 (-180 度から 180 度) をランダムに発生させた正弦波 (1,000,000 個) を加え合わせた結果を示す。個々の要素正弦波の最大振幅の 2 乗和は 333、399 であった。

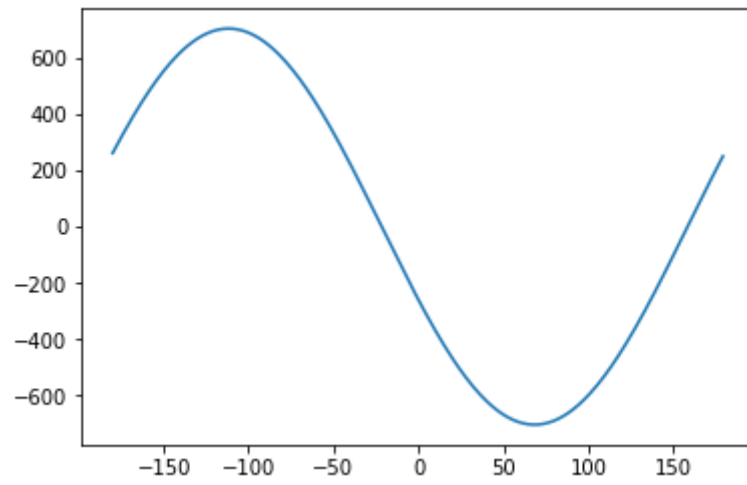


図3 多数の正弦波の合成結果の正弦波 ここでも横軸は位相角度（度）

2. 参考文献

- 1) 久保田広：応用光学、(1989、岩波書店、東京) ,p75
- 2) 牛山善太：波動光学エンジニアリングの基礎 (オプトロニクス、東京、2005)
- 3) E.Hecht:Optics 5th.edi.(Pearson,Harlow,2017),p291-293
- 4) 岩瀬重雄：高校数学公式活用辞典 (旺文社、東京、1994) ,p.182

執筆者：牛山 善太

博士 (工学)

元東海大学工学部光・画像工学科 (レンズ設計) 非常勤講師

(株)タイコ 代表取締役

(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供：

株式会社オプティカルソリューションズ

TEL: **03-5833-1332**

Mail: info@osc-japan.com

Web: <http://www.osc-japan.com>

〒101-0032

東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階