光学設計ノーツ 83 ver. 1.0

多数の波動による干渉、波動の合成の考え方 3

今回もまた、前回に引き続き干渉を考える上で非常に重要となる正弦波動の合成について解説させていただきたい。

1. 波動の複素表示と強度の計算

元々、合成された振幅 u は正弦波の合成として以下の様に(80 回(10)式)表現できた。

$$u = \sum_m A_m \cos\varepsilon_m \cdot \sin(\omega t + \varepsilon_0) + \sum_m A_m \sin\varepsilon_m \cdot \cos(\omega t + \varepsilon_0) \tag{80-10}$$

ここで

$$C = \sum_m A_m \cos\varepsilon_m = A\cos\varepsilon \tag{1}$$

$$S = \sum_m A_m \sin\varepsilon_m = A\sin\varepsilon \tag{2}$$

と新たな時間変化に対して一定な、波動を便宜的に考えた。同一の周波数の正弦波を幾つも考えた場合には、それらが合算された場合に、その結果も正弦波になることについても前回に解説させていただいている。

$$u = A\cos\varepsilon \cdot \sin(\omega t + \varepsilon_0) + A\sin\varepsilon \cdot \cos(\omega t + \varepsilon_0) \tag{3}$$

或いは

$$u = C \cdot \sin(\omega t + \varepsilon_0) + S \cdot \cos(\omega t + \varepsilon_0) \tag{4}$$

(3)式は加法定理を使って再びまとめてみると

$$u = A\sin(\omega t + \varepsilon_0 + \varepsilon) \qquad (5)$$

よって、u の最大振幅は A であり、最大強度 I は、

$$I = C^2 + S^2 = (A\cos\varepsilon)^2 + (A\sin\varepsilon)^2 = A^2 \qquad (6)$$

とできる。また、この時の位相 ε は、以下の関数から求められる（図 1）。

$$\tan\varepsilon = \frac{\sum_m A_m \sin\varepsilon_m}{\sum_m A_m \cos\varepsilon_m} = \frac{A\sin\varepsilon}{A\cos\varepsilon} = \frac{S}{C} \qquad (7)$$

従って、

$$|U|^2 = C^2 + S^2 = A^2 \qquad (8)$$

とすれば

$$U = C + iS \qquad (9)$$

$$U = A\exp[i\varepsilon] \qquad (10)$$

という波動の一般的な複素表示が可能になる。

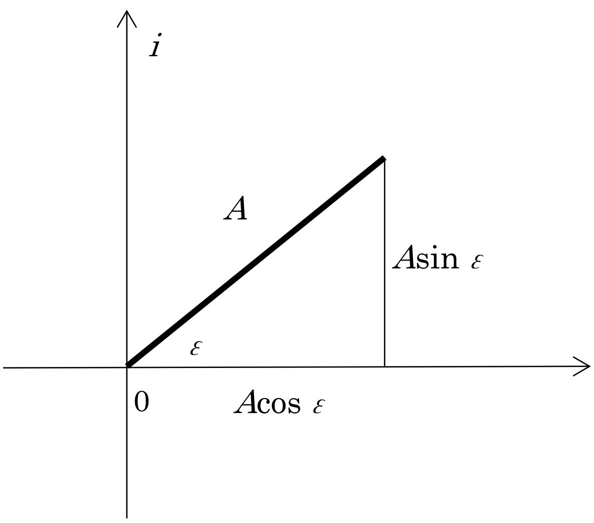

図 1　位相 ε の表現

図 2 に(4)式の計算結果を示す。A＝2 としている。位相（$\omega t+\varepsilon_0$）についてはランダムに値を代入している（図の場合 4 種類）。(5)式からも分かる通り、（$\omega t+\varepsilon_0$）が変化しても、正弦波が横にずれるだけである。

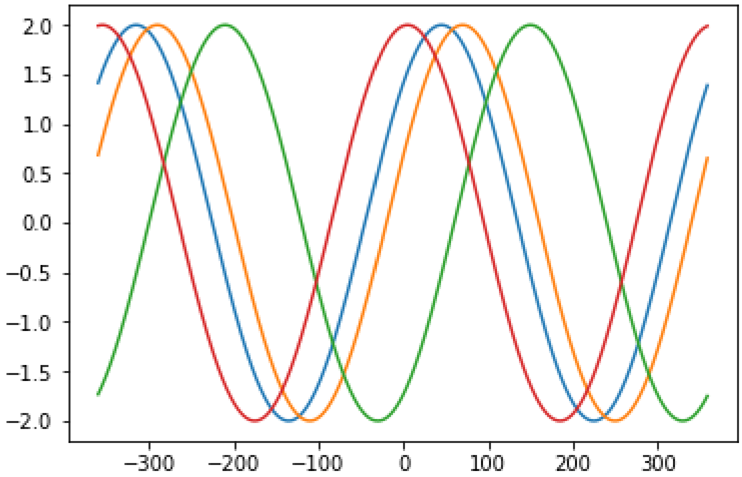

図 2 (4)式における u の計算結果（縦軸）。横軸は度

2． 最大振幅、初期位相の異なる多数の正弦波の合成

本連載、前回において

$$A_m \cos\varepsilon_m = A_m \cos(\theta \quad + \varphi_m) \qquad (82\text{-}3)$$

で表される、波長が一定で、最大振幅 A と初期位相 ϕ が異なる波動の合成、

$$\Sigma_m A_m \cos(\theta + \varphi_m) \qquad (11)$$

がやはり正弦波となることを示した。位相の異なる同じ波長の波動が膨大な数、重なり合っても波動が完全に消えてしまう事は無い。図 3 には(11)式において、振幅 A を 0 から 1 の間に、初期位相 ϕ を-180 度から 180 度の間にランダムに発生させた、波動 100、000 個の合成結果が示されている。やはり正弦波となる。

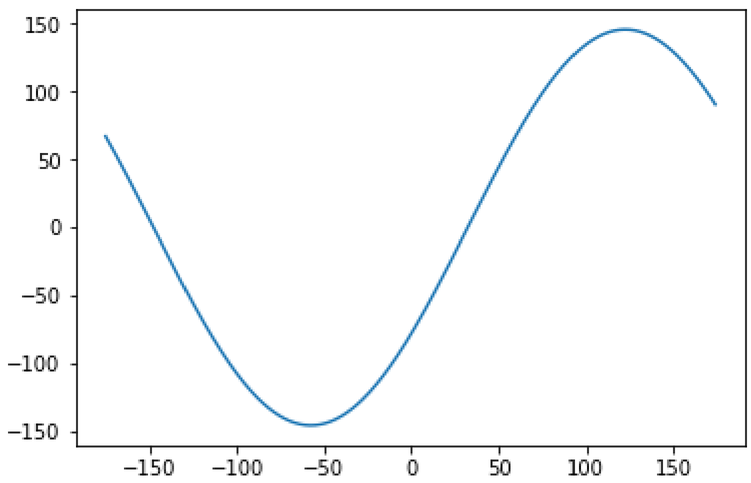

図 3　(11)式の正弦波の合成結果。縦軸は振幅。横軸は角度。100、000 回

明らかに大きな振幅を持っているが、ランダムな最大振幅を全て加え、加え合わせた正弦波の数で割った値が 1 になるように正規化すると図 4 となる。曲線自体は同じであるが振幅は非常に小さくなる。個別には-1 から 1 の間に Am の値を乱数で発生させている。

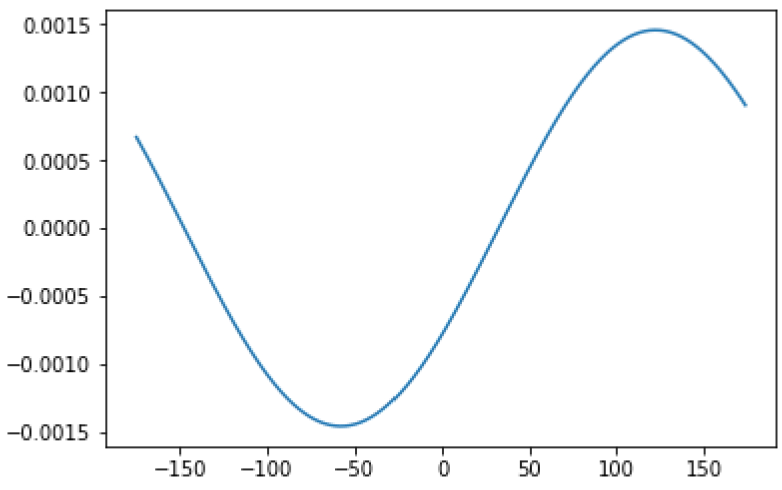

図 4　図 3 の計算において、単独の Am の合計が 1 となる様に振幅を正規化したもの。縦軸の合成された最大振幅の値に注目。

また更に、試行回数を 10,000,000 回に増やすと図 5 にある様に、正規化された振幅は更に小さな値になる。

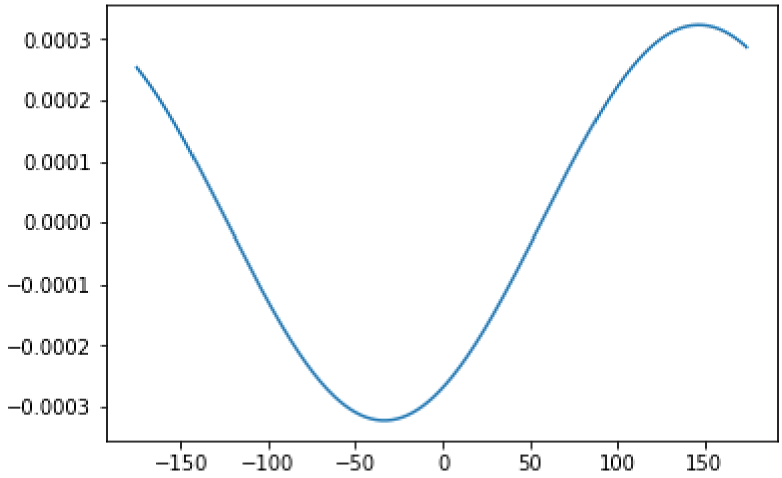

図 5　単独の Am の合計が 1 となる様に振幅を正規化し、
更に 10,000,000 回合成した結果。
最大振幅、初期位相は乱数で発生させているため、
合成正弦波の位相は図 3 のものとは異なる。

それぞれ、ある定まったエネルギーを持つ実際の波動を合成していく場合と、ある定まった特定のエネルギー内において、無数の波動に分解して、それらの合成として場を考える場合とでは、異なる考え方、見方が必要となる。

3． 参考文献

1） 久保田広：応用光学、（1989、岩波書店、東京）

2） 牛山善太：波動光学エンジニアリングの基礎（オプトロニクス、東京、2005）

3） E.Hecht:Optics 5th.edi.(Pearson,Harlow,2017),p291-293

執筆者：牛山 善太

博士（工学）

元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師

(株)タイコ 代表取締役

(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供：

株式会社オプティカルソリューションズ

TEL: **03-5833-1332**

Mail: info@osc-japan.com

Web: http://www.osc-japan.com

〒101-0032

東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階