光学設計ノーツ 84 ver.1.0

Debye 積分による回折の表現　1

回折現象についてさらに勉強するために Debye 積分による回折積分計算を取り上げる。３次元的な回折強度分布の構造を考察する際などにも有益な手法である。今回は、その導出過程について解説させて頂く。

1.　Debye 積分

図 1 にあるように光軸に直行する平面上に、円形開口面と像面が存在する(位置はそれぞれ C と O)。O を原点として像面座標系（x、y、z）をとる。また、O を中心とする円形開口に接する単色球面波の波面 W を考え、その上の点を Q とする。また像界の任意の点を P（x、y、z）をとり、その点上での振幅 U（P）を考える。P を O を原点とする位置ベクトル $\boldsymbol{R}$ で表すこととし、さらに点 Q をやはり O を原点とする、方向を表す単位ベクトル $\boldsymbol{q}$ を用いて $f\boldsymbol{q}$ と表すこととする。この位置ベクトルの成分は（Qx、Qy、Qz）としよう（図 2)。

$$f\boldsymbol{q} = \boldsymbol{i}Q_x + \boldsymbol{j}Q_y + \boldsymbol{k}Q_z \qquad (1)$$

また、

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z \qquad (2)$$

である。この時、円形開口半径を $2a$、QP の距離を s、CO の距離を f と置く。長さ OP、開口半径 a も f に比べて十分に小さな値であるとする。

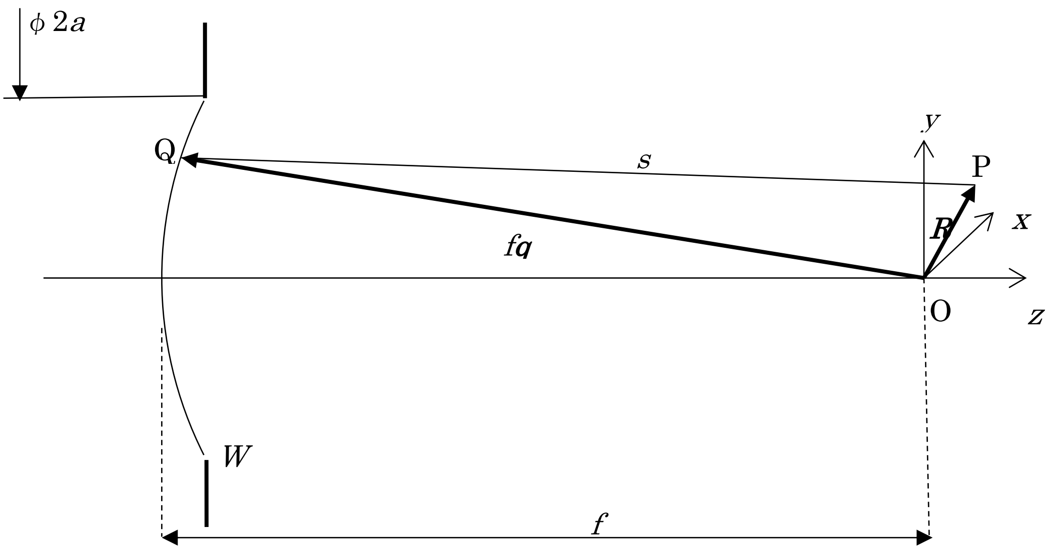

図１　円形開口による P 点における回折を考える

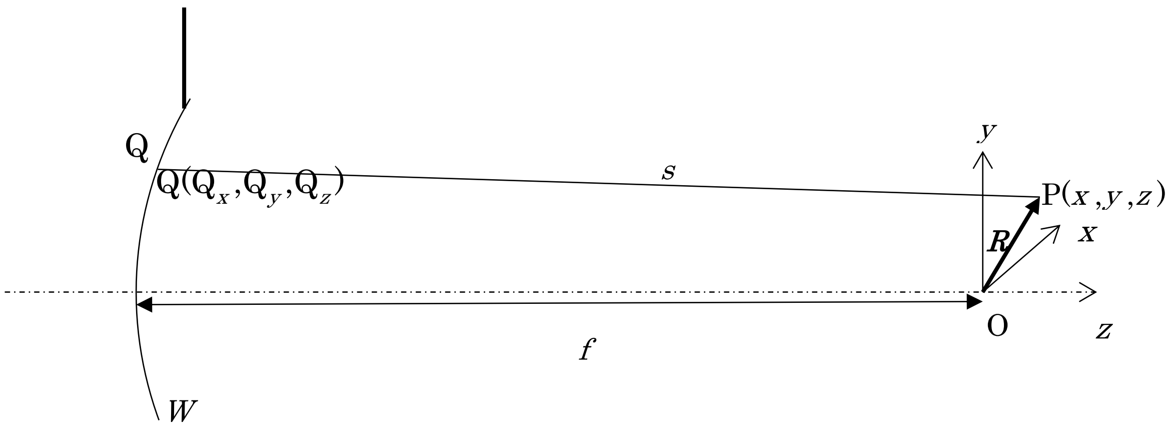

図２　座標のとり方

さて、本連載 27 回にもある通り、距離 r 離れた振幅 A の光源からの影響を考えると、フレネル–キルヒホッフの回折積分式より（$d\sigma$ は波面上の微小面積素）、

$$U(P)=\frac{-iA}{2\lambda}\frac{\exp(ikr)}{r}\iint_{\sigma}\left\{\frac{\exp(iks)}{s}(1+\cos\chi)\right\}d\sigma \qquad (27\text{-}0)$$

と出来る。さて、ここで(27-0)式における χ について考えると、この値は点 Q において波面に直交する光線と、Q から発生する２次波面の影響、つまりは回折の影響を調べる方向の為す角度を示している。ここでは明らかに点 Q を通過する光線の方向に大方のエネルギーは集中し、χ が大きな、光線から大きく逸れた方向への影響は少ないと考えることも出来る。従って χ は十分小さな値の範囲で積分への寄与は有効であると考えられ、また開口の大きさ２a が、f, s 等に比べ十分に小さいとしているので、χ は exp 内に含まれないので、$\cos\chi\to 1$ と出来て(27−0)式は、改めて波面 W 上の微小面積素を dS として

$$U(P)=\frac{-i}{\lambda}\frac{A\exp(ikr)}{r}\iint_{W}\frac{\exp(iks)}{s}dS \qquad (3)$$

と成る。dS により波面 W 全域の積分を行う。この結果は Huygens-Fresnel の原理の通りである。また、λ は波長、k は波数で、

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

である。さて、ここで、（３）式右辺の積分外の振幅・位相項についてであるが、図１の場合には A と r には任意性がある。であれば、O に振幅 A の光源を考えた場合にはそこから発生した球面波上の Q での振幅、位相を採用することにはプロポーション的に問題が無い。順方向とは逆の方向に考えているので位相にマイナスが付き、（３）式は以下の様に表すことが出来よう。

$$U(P)=\frac{-i}{\lambda}\frac{A\exp(-ikf)}{f}\iint_{W}\frac{\exp(iks)}{s}dS \qquad (4)$$

この時、s について考えれば、

$$s=\sqrt{(Q_x-x)^2+\left(Q_y-y\right)^2+(Q_z-z)^2}$$

$$=\sqrt{Q_x^2-2xQ_x+x^2+Q_y^2-2yQ_y+y^2+Q_z^2-2zQ_z+z^2} \qquad (5)$$

と成る。ここで、球面状の波面について考えれば、

$$Q_x^2+Q_y^2+Q_z^2=f^2 \qquad (6)$$

よって、(5)式に代入して、

$$s=\sqrt{f^2-2xQ_x-2yQ_y-2zQ_z+x^2+y^2+z^2} \qquad (7)$$

さらに（1)、(2)式等より、(7）式はベクトルの内積表現を用いて、以下の様に表せる。

$$s=\sqrt{|f\boldsymbol{q}|^2-2(f\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R})+|\boldsymbol{R}|^2} \qquad (8)$$

変形して

$$s=f\sqrt{|\boldsymbol{q}|^2-\frac{2}{f^2}(f\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R})+\frac{1}{f^2}|\boldsymbol{R}|^2}$$

$\boldsymbol{q}$ は単位ベクトルなので

$$s=f\sqrt{1-\frac{2}{f^2}(f\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R})+\frac{1}{f^2}|\boldsymbol{R}|^2} \qquad (9)$$

である。さてここで右辺、平方根内、第 3 項は微小量の 2 次以上の量なので無視すれば

$$(1\pm\alpha)^m\cong 1\pm m\alpha \qquad (10)$$

なる近似式が使えて、

$$s\cong f\left(1-\frac{1}{f}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R})\right)$$

よって

$$s - f \cong -\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{R} \qquad (11)$$

と言う関係が成立する。

2. 参考文献

1）M.Born & E.Wolf :Principles of Optics,7th edition／草川徹訳:光学の原理Ⅱ（東海大学出版会,2006),p.245
2）牛山善太：波動光学エンジニアリングの基礎（オプトロニクス、東京、2005）

執筆者：牛山 善太
博士（工学）
元東海大学工学部光・画像工学科（レンズ設計）非常勤講師
(株)タイコ 代表取締役
(株)オプティカルソリューションズ 顧問

提供：
株式会社オプティカルソリューションズ
TEL: **03-5833-1332**
Mail: info@osc-japan.com
Web: http://www.osc-japan.com
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8 MAS 三田ビル 3 階